

PISMENI ISPIT IZ ELEMENTARNE MATEMATIKE I

1. Dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^n \sin(2i-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

2. Zadane su funkcije $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1| + 1$, $g(x) = 2 - |x|$. Neka je $S = (f \circ g)^{-1}(\{2, 3\})$.

a) Odredite onu relaciju ekvivalencije na skupu S koja inducira particiju:

$$S = (f \circ g)^{-1}(\{2\}) \cup (f \circ g)^{-1}(\{3\}).$$

b) Odredite i skicirajte relaciju $\rho_2 = \{(x, y) \in S^2 : x \leq y\}$.

3. Odredite skup K takav da funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow K$ zadana formulom

$$f(x) = \frac{5^x - 5^{-x}}{5^x + 5^{-x}}$$

bude bijekcija. Dokažite svoju tvrdnju.

4. Racionalnu funkciju

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x-1)^3(x^2+1)}$$

zapišite kao zbroj parcijalnih razlomaka.

5. Provjerite je li realan broj $\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$ iracionalan broj.