

PISMENI ISPIT IZ ELEMENTARNE MATEMATIKE I

1. Dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. a) Neka su $A, B \subseteq \mathcal{U}$ skupovi. U kojem su međusobnom odnosu sljedeći skupovi

i) $\mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,

ii) $\mathcal{P}(A \cup B)$ i $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Dobivene tvrdnje dokazati!

b) Odredite $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

3. Neka je $a \in \mathbb{R}^+$. Neka je f realna funkcija za koju vrijedi

$$f(x) = \frac{1 + f(x-a)}{1 - f(x-a)}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

Provjerite je li f periodična i ako je, odredite temeljni period.

4. Na skupu \mathbb{C} zadana je binarna relacija

$$\rho = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |z| = |w|\}.$$

Dokažite da je ρ relacije ekvivalencije, a zatim odredite i skicirajte klase elemenata

$$z_{1,2} = \sqrt{(\sqrt{3} + i)^3}.$$

5. Ako su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nultočke polinoma $p(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 11$, odredite polinom trećega stupnja čije su nultočke $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, $\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}$, $\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$.