

**PRVI KOLOKVIJ IZ ELEMENTARNE MATEMATIKE I**

1. [30 bodova] Neka je  $\mathcal{U} = \mathbb{R}$  i

$$A^c = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2x+3}{x-2} > 0\right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : 2x^2 + 3x - 2 \leq 0\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} : -2 \leq x < 5\}$$

- (i) Odredite elemente skupova  $S_1 = A \cup B$ ,  $S_2 = A^c \cap B \cap C$ ,  $S_3 = B \triangle C$ ,  $\mathcal{P}(B)$ .
- (ii) Skicirajte skupove  $B \times A$  i  $B \times C$ .
- (iii) Dana je funkcija  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 1$ . Odredite sliku skupa  $B \cup C$  i prasluku skupa  $C$ .
2. [15 bodova] Dokažite da je za svaki prirodni broj  $n$  broj  $3^{n+1} - 2n^2 + 4n + 5$  djeljiv s 8.
3. [15 bodova] Neka je  $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{i - 1}$ . Odredite sve  $n \in \mathbb{N}$  za koje je  $z^n$  realan broj.
4. [15 bodova] Ako skupovi  $A, B$  imaju svojstvo da je  $k(A) = 5$  i  $k(B) = 7$ , odgovorite na sljedeća pitanja (i obrazložite odgovore):
- (a) Da li postoji injekcija sa skupa  $A$  u skup  $B$ ?
- (b) Da li postoji surjekcija sa skupa  $A$  u skup  $B$ ?
- (c) Da li postoji injekcija sa skupa  $B$  u skup  $A$ ?
- (d) Da li postoji surjekcija sa skupa  $B$  u skup  $A$ ?
5. [15 bodova] Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana s  $f(x) = \lambda x + 1$ . Odredite parametar  $\lambda$  tako da funkcija  $f \circ f$  bude identiteta. Za tako određen parametar  $\lambda$  i funkciju  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  zadanu formulom  $g(x) = 3^x$ , odredite  $(g \circ f)$ . Provjerite da li je  $(g \circ f)$  bijekcija, ako jeste odredite  $(g \circ f)^{-1}$ .
6. [10 bodova] Skicirajte graf funkcije  $f$  zadane formulom  $f(x) = |\log_{\frac{1}{5}}(x+1)|$ .

**Napomena.** Sve svoje tvrdnje obrazložite.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0

PRVI KOLOKVIJ IZ ELEMENTARNE MATEMATIKE I

1. [30 bodova] Neka je  $\mathcal{U} = \mathbb{R}$  i

$$A^c = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{3x-7}{x+2} \geq 0\right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} : 2x^2 - 5x + 2 \leq 0\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x < 2\}$$

(i) Odredite elemente skupova  $S_1 = A \cup C$ ,  $S_2 = A^c \cap B \cap C$ ,  $S_3 = B \triangle C$ ,  $\mathcal{P}(B)$ .

(ii) Skicirajte skupove  $B \times A$  i  $C \times B$ .

(iii) Dana je funkcija  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2$ . Odredite sliku skupa  $B \cup C$  i prasluku skupa  $B$ .

2. [15 bodova] Dokažite da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

3. [15 bodova] Neka je  $z = \frac{i\sqrt{3}-1}{1-i}$ . Odredite sve  $n \in \mathbb{N}$  za koje je  $z^n$  čisto imaginaran broj.

4. [15 bodova] Ako skupovi  $C, D$  imaju svojstvo da je  $k(C) = 4$  i  $k(D) = 5$ , odgovorite na sljedeća pitanja (i obrazložite odgovore):

(a) Da li postoji injekcija sa skupa  $C$  u skup  $D$ ?

(b) Da li postoji surjekcija sa skupa  $C$  u skup  $D$ ?

(c) Da li postoji injekcija sa skupa  $D$  u skup  $C$ ?

(d) Da li postoji surjekcija sa skupa  $D$  u skup  $C$ ?

5. [15 bodova] Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana s  $f(x) = \lambda x + 2$ . Odredite parametar  $\lambda$  tako da funkcija  $f \circ f$  bude identiteta. Za tako određen parametar  $\lambda$  i funkciju  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  zadanu formulom  $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ , odredite  $(g \circ f)$ . Provjerite da li je  $(g \circ f)$  bijekcija, ako jeste odredite  $(g \circ f)^{-1}$ .

6. [10 bodova] Skicirajte graf funkcije  $f$  zadane formulom  $f(x) = |\log_3(x+2)|$ .

**Napomena.** Sve svoje tvrdnje obrazložite.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0