ODJEL ZA MATEMATIKU
SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU *14. prosinca 2009.*

DRUGI KOLOKVIJ IZ ELEMENTARNE MATEMATIKE I

1. Zadane su funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$; $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = x^2$. Ako postoje funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$ provjerite jesu li one surjekcije, injekcije, bijekcije.
   [$f \circ g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = x^2$ (funkcija je injekcija, a nije surjekcija niti bijekcija); $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, (g \circ f)(x) = x^2$ (funkcija je surjekcija, a nije injekcija niti bijekcija).]

2. Odredite skupove $S_1 = f(\{-1, 2\})$, $S_2 = f^{-1}(\{1\})$, ako je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1, \\ 3 - x, & x > 1 \end{cases},$$

   a zatim na skupu $S = S_1 \cup S_2$ definirajte relaciju ekvivalencije kojoj su klase ekvivalencije skupovi $S_1 \setminus S_2$ i S_2.
   [$S_1 = \{0, 1\}, S_2 = \{0, 2\}, \rho = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 2), (2, 0)\}$]

3. Na skupu $\mathbb{Z}^2$ definirana je relacija ρ na sljedeći način

$$(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2.$$

   Provjerite svojstva relacije ρ. Je li ρ relacija parcijalnog uređaja?
   [Relacija je refleksivna i tranzitivna, a nije simetrična niti antisimetrična.]

4. Dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ broj $2^{2^{n+1}}$ daje ostatak 1 pri dijeljenju s 5.
   [Metodom matematičke indukcije se pokaže da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $2^{2^{n+1}} = 5k + 1, k \in \mathbb{N}$.]

5. Odredite i skicirajte skup svih kompleksnih brojeva za koje je broj $\dfrac{1 - z}{iz}$ realan broj.
   [$\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : z = x + yi \;\wedge\; (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$.]

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.