Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
15. lipnja 2016.

**Drugi kolokvij iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II**
Ak. god. 2015./2016.

**Zadatak 1 (10 bodova)** *Teška homogena žica mase 6 kg i duljine $l = 6\,m$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 30\,kg$ na desnom kraju. Na lijevu polovicu žice djeluje sila s koeficijentom elastičnosti $q = 10$. Odredite ravnotežni položaj žice ako je njezin lijevi kraj pričvršćen!*

*UPUTA: Dovoljno je zapisati konačno rješenje pomoću neodređenih konstanti te zapisati sustav jednadžbi koji te konstante zadovoljavaju!*

**Rješenje.**

$$(p(x)u'(x))' - q(x)u(x) + f(x) = 0,$$
$$p = M \cdot g,\ f = -\rho \cdot g,\ \rho = \tfrac{m}{l}.$$

Uvrštavanjem zadanih podataka dobivamo:

(1) za $x \in [0,3]$: $\quad 300u''(x) - 10u(x) = 10,$

(2) za $x \in [3,6]$: $\quad 300u''(x) = 10.$

Riješimo najprije jednadžbu (1). Dijeljenjem s 300 dobivamo:

$$u''(x) - \frac{1}{30}u(x) = \frac{1}{30}. \tag{1}$$

Radi se o linearnoj nehomogenoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$u''(x) - \frac{1}{30}u(x) = 0:$$

$$30\lambda^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{30}}$$

Slijedi da je homogeno rješenje oblika

$$u_h(x) = C_1 e^{\frac{-x}{\sqrt{30}}} + C_2 e^{\frac{x}{\sqrt{30}}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikularno rješenje tražimo u obliku $u_p(x) = A$. Uvrštavanjem u (1) dobivamo

$$-\frac{1}{30}A = \frac{1}{30},$$

tj. $u_p(x) = -1$ pa imamo

$$u(x) = u_p(x) + u_h(x) = C_1 e^{\frac{-x}{\sqrt{30}}} + C_2 e^{\frac{x}{\sqrt{30}}} - 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Jednadžbu (2) ćemo riješiti integracijom dva puta po $x$. Dobivamo:

$$u(x) = \frac{x^2}{60} + Cx + D, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Rješenje možemo zapisati u obliku

$$u(x) = \begin{cases} C_1 e^{\frac{-x}{\sqrt{30}}} + C_2 e^{\frac{x}{\sqrt{30}}} - 1, & x \in [0,3] \\ \frac{x^2}{60} + Cx + D, & x \in [3,6] \end{cases} \quad C_1, C_2, C, D \in \mathbb{R}.$$

Da bismo formirali sustav jednadžbi iz kojeg dobivamo vrijednosti konstanti $C_1, C_2, C$ i $D$, iskoristiti ćemo svojstvo neprekidnosti žice, tj. $u(3-) = u(3+)$, svojstvo glatkoće žice $u'(3-) = u'(3+)$ i uvjet da su oba kraja žice pričvršćena $u(0) = u(6) = 0$. Dobivamo sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}
u(0) = 0 \quad & \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1 \\
u(6) = 0 \quad & \Rightarrow \quad \tfrac{3}{5} + 6C + D = 0 \\
u(3+) = u(3-) \quad & \Rightarrow \quad C_1 e^{\frac{-3}{\sqrt{30}}} + C_2 e^{\frac{3}{\sqrt{30}}} - 1 = \tfrac{3}{20} + Cx + D \\
u'(3+) = u'(3-) \quad & \Rightarrow \quad \tfrac{C_2}{\sqrt{30}} e^{\frac{3}{\sqrt{30}}} - \tfrac{C_1}{\sqrt{30}} e^{\frac{-3}{\sqrt{30}}} = C + \tfrac{1}{10}.
\end{aligned}$$

**Zadatak 2 (15 bodova)** *Izračunajte integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(4x)}{x^2 - 1}\, dx.$$

**Rješenje.** Vrijedi

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4x}{x^2 - 1} \mathrm{d}x = \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i4x}}{(x-1)(x+1)} \mathrm{d}x.$$

Definirajmo funkciju

$$F(z) = \frac{e^{4iz}}{(z-1)(z+1)}.$$

Funkcija $F$ je analitička svuda osim u točkama $z = 1$ i $z = -1$ koje su su polovi prvog reda i nalaze se na realnoj osi. Za $z = Re^{i\varphi},\ \varphi \in [0, \pi],\ R > 1$ imamo:

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{z^2 - 1} \right| \leq \frac{1}{|z|^2 - 1} = \frac{1}{R^2 - 1}$$

pa $|f(z)|$ teži ka nuli kada $R$ teži u beskonačnost. Računamo reziduume funkcije $F$ u danim polovima:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(F(z), 1) &= \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)e^{i4z}}{(z-1)(z+1)} &= \frac{e^{4i}}{2} \\
\mathrm{Res}(F(z), -1) &= \lim_{z \to -1} \frac{(z+1)e^{i4z}}{(z-1)(z+1)} &= -\frac{e^{-4i}}{2}
\end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
I &= \mathrm{Im}\left(\pi i \cdot \mathrm{Res}(F(z), 1) + \pi i \cdot \mathrm{Res}(F(z), -1)\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\pi \frac{e^{4i} - e^{-4i}}{2i}\right) \\
&= \mathrm{Im}(-\pi sin4) = 0.
\end{aligned}$$

**Zadatak 3 (15 bodova)** *Riješite Dirichletov rubni problem*

$$\begin{cases}
\Delta u(x, y) = 0, \text{ na } \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\} \\
\\
u(0, y) = y, \qquad 0 \leq y \leq 2 \\
u(0, y) = 0, \qquad \text{inače.}
\end{cases}$$

**Rješenje.** Dirichletov problem je zadan na području $D$ koje je lijeva poluravnina, tj. skup svih točaka $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ za koje je $x < 0$. Mi ćemo ga promatrati na gornjoj poluravnini $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y > 0\}$ jer na takvom području znamo naći rješenje problema. Dovoljno je naći odgovarajuće konformno preslikavanje koje će $D$ preslikati u $D'$. Primijetimo da će takvo preslikavanje biti specijalna Möbiusova transformacija: rotacija za kut $-\dfrac{\pi}{2}$ kojoj odgovara pravilo pridruživanja $f(z) = e^{-\frac{i\pi}{2}} z = -iz$.
Napomenimo da smo transformaciju mogli izračunati i na osnovu njenog ponašanja u neke tri točke, npr. iz uvjetâ $f(0) = 0,\ \ f(i) = 1$ i $\ f(\infty) = \infty$.
Za $z = x + iy$ dobivamo

$$f(z) = -iz = -i(x+iy) = y - xi$$

pa je u novoj $uv$-ravnini realni dio kompleksne funkcije $f$ jednak $u = y$, a imaginarni dio je $v = -x$. Pogledajmo kako $f$ transformira segment $[0,2]$ na imaginarnoj osi:

$$\begin{array}{l} u = y \\ v = -x \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{za} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ y \in [0,2] \end{array} \quad \text{dobivamo} \quad \begin{array}{l} v = 0 \\ u \in [0,2] \end{array}.$$

Vrijedi $U(u,v) = u(x,y)$. Zbog $u(0,y) = y,\ y \in [0,2]$ je $U(u,v) = U(u,0) = u,\ u \in [0,2]$. Novi rubni problem je

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U(u,v) = 0 \quad \text{na} \quad D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\} \\[2mm] U(u,v)\big|_{v=0} = \left\{ \begin{array}{ll} u, & u \in [0,2] \\ 0, & u \notin [0,2], \end{array} \right. \end{array} \right. ,$$

a njega znamo riješiti. Imamo

$$\begin{aligned} U(u,v) &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{v \cdot U(t,0)}{(t-u)^2 + v^2} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{2} \frac{v \cdot t}{(t-u)^2 + v^2} \mathrm{d}t \\ &= \frac{v}{2\pi} \int\limits_{0}^{2} \frac{2t \pm 2u}{(t-u)^2 + v^2} \mathrm{d}t \\ &= \frac{v}{2\pi} \ln \left|(t-u)^2 + v^2\right| \Big|_0^2 + \frac{vu}{\pi} \frac{1}{v} \mathrm{arctg} \left( \frac{t-u}{v} \right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{v}{2\pi} \ln \left| \frac{(2-u)^2 + v^2}{u^2 + v^2} \right| + \frac{u}{\pi} \mathrm{arctg} \left( \frac{2-u}{v} \right) - \frac{u}{\pi} \mathrm{arctg} \left( -\frac{u}{v} \right), \end{aligned}$$

pa je rješenje originalnog problema

$$u(x,y) \;\; = \;\; \frac{-x}{2\pi} \ln \left| \frac{(2-y)^2 + x^2}{y^2 + x^2} \right| + \frac{y}{\pi} \mathrm{arctg} \left( \frac{2-y}{-x} \right) - \frac{y}{\pi} \mathrm{arctg} \left( \frac{-y}{-x} \right).$$

**Zadatak 4 (15 bodova)** *Olovna kugla malih dimenzija zagrijana je na* $100°$*. U trenutku* $t = 0$ *uronimo je u vodenu kupku velikih dimenzija čiju temperaturu konstantno održavamo na* $30°$*. Toplinska vodljivost olova izuzetno je velika pa možemo pretpostaviti da je temperatura kugle jednaka u svim njezinim točkama u svakom pojedinom trenutku. Prema Newtonovom zakonu hlađenja brzina promjene temperature uronjene kugle proporcionalna je razlici temperatura kugle i vodene kupke u kojoj se ona hladi. Na kraju treće minute hlađenja temperatura kugle smanjena je na* $70°$*. Koliko će vremena proći dok se ona smanji na* $31°$*?*

**Rješenje.** Rješavamo diferencijalnu jednadžbu za zadani problem:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T-30)$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{T-30} = -k\mathrm{d}t$$

$$\ln|T-30| = -kt + \ln C,\ C>0$$

$$\ln\frac{|T-30|}{C} = \ln e^{-kt}$$

$$|T-30| = Ce^{-kt}$$

$$T(t) = 30 + Ce^{-kt}\ C \neq 0$$

U trenutku $t=0$ temperatura kugle je $100^\circ$ pa je $T(0)=100$. Nadalje, $T(3)=70$. Uvrštavanjem ovih uvjeta u $T(t)=30+Ce^{-kt}$ dobivamo $C=70$ i $k\approx 0.1866$ pa vrijedi

$$T(t) = 30 + 70e^{-0.1866t}.$$

Sada je lako odrediti $t$ za koji vrijedi $T(t)=31$. Dobivamo $t\approx 23$ minute.

**Zadatak 5 (10 bodova)** *Kugla mase 4 kg pričvršćena je za elastičnu oprugu prirodne duljine 1 m. Sila od 24.3 N je potrebna da rastegne oprugu do duljine 1.3 m. Ako oprugu stegnemo do duljine 0.8 m, a zatim ju pustimo, kako izgleda funkcija pomaka kugle u proizvoljnom trenutku $t$? Što možete zaključiti o ponašanju kugle kada vrijeme teži u beskonačnost?*

**Rješenje.** Ako sa $l_1$ označimo prirodnu duljinu opruge, a sa $l_2$ duljinu opruge nakon djelovanja sile, onda prema identitetu $F_{\text{op}} = k(l_2 - l_1)$ dobivamo $24.3 = k(1.3-1)$ pa je $k=81$. Obzirom da nema djelovanja vanjske sile niti je na tijelo pričvršćen prigušivač, jednadžba harmonijskog oscilatora je $4x''(t)+81x(t)=0$, odnosno,

$$x''(t) + 20.25x(t) = 0.$$

Dobivena jednadžba je homogena linearna ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima. Pripadna karakteristična jednadžba je $r^2+20.25=0$ čija su rješenja kompleksno konjugirani par

$$r_{1,2} = \pm\frac{9}{2}i.$$

Funkcija pomaka je oblika

$$x(t) = A\cos\left(\frac{9}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{9}{2}t\right), \quad A,B\in\mathbb{R}.$$

Početni položaj kugle dan je s $x(0)=-0.2$, a početna brzina je $x'(0)=0$ pa pomoću ovih podataka dobivamo iznose konstanti: $A=-0.2$, $B=0$. Dobivamo

$$x(t) = -0.2\cos\left(\frac{9}{2}t\right).$$

Ovakvo gibanje je harmonijsko pa funkcija pomaka ne konvergira kada $t$ teži u beskonačnost. To znači da će kugla neprestano titrati amo-tamo oko svog ravnotežnog položaja.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
15. lipnja 2016.

**Drugi kolokvij iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II**
Ak. god. 2015./2016.

**Zadatak 1 (10 bodova)** *Teška žica duljine $l = 8\,m$ sastavljena je od dva homogena materijala. Prva polovica žice je linijske gustoće $\rho_1 = 4\,kg/m$, a druga polovica ima linijsku gustoću $\rho_2 = 6\,kg/m$. Žica je cijelom svojom duljinom uronjena u homogeno sredstvo s koeficijentom elastičnosti $q = 4$. Odredite ravnotežni položaj žice ako je na njenom lijevom kraju pričvršćen uteg mase $M = 12\,kg$, dok je njen desni kraj slobodan !*
*UPUTA: Dovoljno je zapisati konačno rješenje pomoću neodređenih konstanti te zapisati sustav jednadžbi koji te konstante zadovoljavaju!*

**Rješenje.**

$$(p(x)u'(x))' - q(x)u(x) + f(x) = 0,$$
$$p = M \cdot g,\ \ f = -\rho \cdot g,\ \ \rho = \tfrac{m}{l}.$$

Uvrštavanjem zadanih podataka dobivamo:

(1) za $x \in [0,4]$: $\quad 120u''(x) - 4u(x) = 40,$

(2) za $x \in [4,8]$: $\quad 120u''(x) - 4u(x) = 60.$

Riješimo najprije jednadžbu (1). Dijeljenjem sa 120 dobivamo:

$$u''(x) - \frac{1}{30}u(x) = \frac{1}{3}. \tag{2}$$

Radi se o linearnoj nehomogenoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$u''(x) - \frac{1}{30}u(x) = 0:$$

$$120\lambda^2 - 4 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Slijedi da je homogeno rješenje oblika

$$u_h(x) = C_1 e^{\frac{-x}{\sqrt{30}}} + C_2 e^{\frac{x}{\sqrt{30}}},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikularno rješenje tražimo u obliku $u_p(x) = A$. Uvrštavanjem u (2) dobivamo

$$-\frac{1}{30}A = \frac{1}{3}$$

tj. $u_p(x) = -10$ pa imamo

$$u(x) = u_p(x) + u_h(x) = C_1 e^{\frac{-x}{\sqrt{30}}} + C_2 e^{\frac{x}{\sqrt{30}}} - 10, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Jednadžba (2) je istog tipa kao i jednadžba (1), a rješenje joj je

$$u(x) = C_3 e^{\frac{-x}{\sqrt{30}}} + C_4 e^{\frac{x}{\sqrt{30}}} - 15.$$

$$u(x) = \begin{cases} C_1 e^{\frac{-x}{\sqrt{30}}} + C_2 e^{\frac{x}{\sqrt{30}}} - 10, & x \in [0,4] \\ C_3 e^{\frac{-x}{\sqrt{30}}} + C_4 e^{\frac{x}{\sqrt{30}}} - 15, & x \in [4,8] \end{cases}, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Da bismo formirali sustav jednadžbi iz kojeg dobivamo vrijednosti konstanti $C_1, C_2, C_3$ i $C_4$, iskoristiti ćemo svojstvo neprekidnosti žice, tj. $u(4-) = u(4+)$, svojstvo glatkoće žice $u'(4-) = u'(4+)$ i uvjet da je lijevi kraj žice pričvršćen, tj. $u(0) = 0$, a desni kraj slobodan odn. $u'(8) = 0$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
u(0) = 0 \quad & \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 10 \\
u'(8) = 0 \quad & \Rightarrow \quad \tfrac{C_3}{\sqrt{30}} e^{\frac{8}{\sqrt{30}}} - \tfrac{C_4}{\sqrt{30}} e^{\frac{-8}{\sqrt{30}}} \\
u(4+) = u(4-) \quad & \Rightarrow \quad C_1 e^{\frac{-4}{\sqrt{30}}} + C_2 e^{\frac{4}{\sqrt{30}}} - 10 = C_3 e^{\frac{-4}{\sqrt{30}}} + C_4 e^{\frac{4}{\sqrt{30}}} - 15 \\
u'(4+) = u'(4-) \quad & \Rightarrow \quad \tfrac{C_2}{\sqrt{30}} e^{\frac{4}{\sqrt{30}}} - \tfrac{C_1}{\sqrt{30}} e^{\frac{-4}{\sqrt{30}}} = \tfrac{C_3}{\sqrt{30}} e^{\frac{4}{\sqrt{30}}} - \tfrac{C_4}{\sqrt{30}} e^{\frac{-4}{\sqrt{30}}}.
\end{aligned}$$

**Zadatak 2 (15 bodova)** *Izračunajte integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(2x)}{x^2 - 4} \, dx.$$

**Rješenje.** Vrijedi

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos 2x}{x^2 - 4} \mathrm{d}x = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{2ix}}{(x-2)(x+2)} \mathrm{d}x.$$

Definirajmo funkciju

$$F(z) = \frac{z e^{2iz}}{(z-2)(z+2)}.$$

Funkcija $F$ je analitička svuda osim u točkama $z = 2$ i $z = -2$ koje su su polovi prvog reda i nalaze se na realnoj osi. Za $z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$, $R > 2$ imamo:

$$|f(z)| = \left| \frac{z}{z^2 - 4} \right| \leq \frac{|z|}{|z|^2 - 4} = \frac{R}{R^2 - 4}$$

pa $|f(z)|$ teži ka nuli kada $R$ teži u beskonačnost. Računamo reziduume funkcije $F$ u danim polovima:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(F(z), 2) &= \lim_{z \to 2} \frac{(z-2) z e^{2iz}}{(z-2)(z+2)} &= \frac{e^{4i}}{2} \\
\mathrm{Res}(F(z), -2) &= \lim_{z \to -2} \frac{(z+2) z e^{2iz}}{(z-2)(z+2)} &= \frac{e^{-4i}}{2}
\end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
I &= \mathrm{Re}(\pi i \cdot \mathrm{Res}(F(z), 2) + \pi i \cdot \mathrm{Res}(F(z), -2)) \\
&= \mathrm{Re}\left( -i\pi \frac{e^{4i} + e^{-4i}}{2} \right) \\
&= \mathrm{Re}(i\pi \cos 4) = 0.
\end{aligned}$$

**Zadatak 3 (15 bodova)** *Riješite Dirichletov rubni problem*

$$\begin{cases}
\Delta u(x, y) = 0, \ \text{na} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \\
\\
u(x, 0) = -x, \qquad 1 \leq x \leq 4 \\
u(x, 0) = 0, \qquad \text{inače.}
\end{cases}$$

**Rješenje.** Dirichletov problem je zadan na području $D$ koje je donja poluravnina, tj. skup svih točaka $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ za koje je $y<0$. Mi ćemo ga promatrati na gornjoj poluravnini $D'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,y>0\}$ jer na takvom području znamo naći rješenje problema. Dovoljno je naći odgovarajuće konformno preslikavanje koje će $D$ preslikati u $D'$. Primijetimo da će takvo preslikavanje biti specijalna Möbiusova transformacija: rotacija za kut $\pi$ kojoj odgovara pravilo pridruživanja $f(z)=e^{i\pi}z=-z$. Napomenimo da smo transformaciju mogli izračunati i na osnovu njenog ponašanja u neke tri točke, npr. iz uvjetâ $f(0)=0,\;\; f(-1)=1$ i $\;f(\infty)=\infty$.
Za $z=x+iy$ dobivamo

$$f(z)=-z=-(x+iy)=-x-yi$$

pa je u novoj $uv$-ravnini realni dio kompleksne funkcije $f$ jednak $u=-x$, a imaginarni dio je $v=-y$. Pogledajmo kako $f$ transformira segment $[1,4]$ na realnoj osi:

$$\begin{array}{l} u=-x \\ v=-y \end{array} \;\Rightarrow\; \text{za} \;\; \begin{array}{l} x\in[1,4] \\ y=0 \end{array} \;\; \text{dobivamo} \;\; \begin{array}{l} v=0 \\ u\in[-4,-1] \end{array}.$$

Vrijedi $U(u,v)=u(x,y)$. Zbog $u(x,0)=-x,\;\; x\in[1,4]$ je $U(u,v)=U(u,0)=u,\;\; u\in[-4,-1]$. Novi rubni problem je

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta U(u,v)=0 \quad \text{na} \quad D'=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : v>0\} \\[2mm] U(u,v)\big|_{v=0}=\left\{\begin{array}{ll} u, & u\in[-4,-1] \\ 0, & u\notin[-4,-1] \end{array}\right. \end{array}\right. ,$$

a njega znamo riješiti. Imamo

$$\begin{aligned} U(u,v) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v\cdot U(t,0)}{(t-u)^2+v^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-4}^{-1}\frac{v\cdot t}{(t-u)^2+v^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{v}{\pi}\int_{-4}^{-1}\frac{t}{(t-u)^2+v^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{v}{2\pi}\ln\left|(t-u)^2+v^2\right|\Big|_{-4}^{-1}+\frac{u}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{t-u}{v}\right)\Big|_{-4}^{-1} \\ &= \frac{v}{2\pi}\ln\left|\frac{(-1-u)^2+v^2}{(-4-u)^2+v^2}\right|+\frac{u}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{-1-u}{v}\right)-\frac{u}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{-4-u}{v}\right), \end{aligned}$$

pa je rješenje originalnog problema

$$u(x,y) = \frac{-y}{2\pi}\ln\left|\frac{(x-1)^2+y^2}{(x-4)^2+y^2}\right|-\frac{x}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-1}{-y}\right)+\frac{x}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-4}{-y}\right).$$

**Zadatak 4 (15 bodova)** *Pivo u bačvi od* 2000 $L$ *sadrži* 4% *alkohola. U bačvu se brzinom od* 20 $L/min$ *ulijeva još piva koje sadrži* 6% *alkohola. Dospjelo pivo se odmah miješa sa pivom u bačvi te istom brzinom istječe iz bačve. Ako se zna da je promjena količine alkohola u bačvi u nekom trenutku jednaka razlici brzine kojom ona utječe u spremnik i brzine kojom istječe iz spremnika, koliki postotak alkohola će sadržavati bačva piva nakon jednog sata?*

**Rješenje.** Označimo s $y(t)$ količinu alkohola u bačvi u trenutku $t$. U nekom početnom trenutku u bačvi je 4% alkohola pa imamo $y(0)=\dfrac{4\cdot 2000}{100}=80\mathrm{L}$. Količina piva u bačvi konstantna je cijelo vrijeme pa je postotak alkohola u bačvi u proizvoljnom trenutku $t$ jednak $\dfrac{y(t)}{2000}\cdot 100=\dfrac{y(t)}{20}$. Promjena količine alkohola dana je jednadžbom:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0.06\cdot\left(20\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}}\right)-\frac{y(t)}{2000}\cdot\left(20\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}}\right)=\frac{120-y}{100}.$$

Radi se o običnoj diferencijalnoj jednadžbi sa separiranim varijablama. Dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{120-y} &= \frac{\mathrm{d}t}{100}\\ -\ln|120-y| &= \frac{t}{100}+C\end{aligned}$$

Iz $y(0)=80$ dobivamo $C=-\ln 40$. Slijedi

$$\begin{aligned}\ln\frac{|120-y|}{40} &= -\frac{t}{100}\\ \frac{|120-y|}{40} &= e^{-\frac{t}{100}}.\end{aligned}$$

Funkcija $y$ je neprekidna pa zbog $y(0)=80>0$ i činjenice da je desna strana gornje jednadžbe uvijek različita od nule, vrijedi $120-y>0$. Dobivamo rješenje

$$y(t)=120-40e^{\frac{-t}{100}}.$$

Nakon jednog sata u bačvi se nalazi $y(60)\approx 4,9\%$ alkohola.

**Zadatak 5 (10 bodova)** *Kugla mase 2 kg pričvršćena je za elastičnu oprugu. Sila od 6 N je potrebna da rastegne oprugu za 0.5 m u odnosu na njenu prirodnu duljinu. Na kuglu je pričvršćen prigušivač s koeficijentom prigušenja 14. Ako oprugu rastegnemo za 1 m u odnosu na njenu prirodnu duljinu, a zatim ju pustimo, kako izgleda funkcija pomaka kugle u proizvoljnom trenutku $t$? Što možete zaključiti o ponašanju kugle kada vrijeme teži u beskonačnost?*

**Rješenje.** Ako sa $l_1$ označimo prirodnu duljinu opruge, a sa $l_2$ duljinu opruge nakon djelovanja sile, onda prema identitetu $F_{\text{op}}=k(l_2-l_1)$ dobivamo $6=k\cdot 0.5$ pa je $k=12$. Obzirom da nema djelovanja vanjske sile, jednadžba harmonijskog oscilatora je $2x''(t)+14x'(t)+12x(t)=0$, odnosno,

$$x''(t)+7x'(t)+6x(t)=0.$$

Dobivena jednadžba je homogena linearna ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima. Pripadna karakteristična jednadžba je $r^2+7r+6=0$ čija su rješenja realni i međusobno različiti brojevi

$$r_1=-6,\quad r_2=-1.$$

Funkcija pomaka je oblika

$$x(t)=Ae^{-6t}+Be^{-t},\quad A,B\in\mathbb{R}.$$

Početni položaj kugle dan je s $x(0)=1$, a početna brzina je $x'(0)=0$ pa pomoću ovih podataka dobivamo iznose konstanti: $A=-\frac{1}{5}$, $B=\frac{6}{5}$. Dobivamo

$$x(t)=-\frac{1}{5}e^{-6t}+\frac{6}{5}e^{-t}.$$

Funkcija pomaka konvergira ka nuli kada $t$ teži u beskonačnost što znači da će kugla s vremenom prestati titrati.