Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
20. rujna 2016.

Pismeni ispit iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II

Zadatak 1. [10 bodova]

Teška homogena žica mase 5kg i duljine 2m napeta je na lijevom kraju, horizontalno utegom mase 10kg. Na lijevu polovicu žice djeluje sila s koeficijentom elastičnosti $q = 6$. Odredite ravnotežni položaj žice ako je njezin desni kraj slobodan. Dovoljno je zapisati konačno rješenje pomoću neodređenih konstanti te zapisati sustav jednadžbi koji te konstante zadovoljavaju.

Zadatak 2. [15 bodova]

Tvrtka FXMax bavi se proizvodnjom grafičkih kartica, te nagodinu namjerava izdati novu liniju kartica koja se sastoji od dva modela. Proizvodni proces za grafičke kartice je nesavršen, pa proizvod može biti dijelom neispravan. Ukoliko proizvod u potpunosti radi, FXMax ga naziva modelom FX500 čiji je udio označen s x i prodaje se za 500 dolara. Ukoliko proizvod ima grešku, FXMax isključuje neispravan dio i prodaje karticu pod nazivom FX200 za 200 dolara. FXMax na raspolaganju ima 3 milijarde dolara koje može rasporediti u istraživanje (r) i marketing (m). Udio prodanih modela FX200 procjenjuje se na $e^{-\frac{m}{1000}} + e^{-\frac{r}{2000}}$, gdje su m i r izraženi u milijunima dolara. Minimizirajte troškove dane s $T(x, m, r) = r + m - D(x)$ ako znate da tvrtka planira prodati 10 milijuna kartica, te da je $D(x)$ funkcija profita od prodaje kartica.

Zadatak 3. [10 bodova]

Populacija pingvina na Madagaskaru ima maksimum od $M = 1000$ jedinki, te padne li ispod $m = 50$ populacija izumire. Prvi puta kada su znanstvenici promatrali populaciju pingvina, ona je iznosila 300. Deset godina kasnije populacija pingvina je pala na 200. Ako je model promjene populacije dan s

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = k \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{M}\right) \cdot \left(1 - \frac{m}{P}\right),$$

gdje je $k \in \mathbb{R}$ nepoznati koeficijent, odredite kada će populacija pingvina iznositi 100.

Zadatak 4. [15 bodova]

Riješite Dirichletov rubni problem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u(x,y) = 0 \quad \text{na} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}, \\ u(0,y) = \left\{ \begin{array}{ll} y+2, & y \in [-2,1], \\ 0, & y \notin [-2,1], \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Zadatak 5. [10 bodova]

Vektorsko polje $\vec{v} = xyz\vec{i} + (x+y)z\vec{j} + 2xy\vec{k}$ rastavite na potencijalno i solenoidalno.

Zadatak 6. [15 bodova]

Odredite tok vektorskog polja $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ kroz vanjsku stranu plohe $a^2x^2 + b^2y^2 = z^2$, $0 \le z \le 2$. Dvostruke integrale koje ćete dobiti nije potrebno izračunati do kraja. Dovoljno ih je zapisati u obliku koji je moguće riješiti koristeći se tablicom elementarnih integrala, tj. odrediti granice i primijeniti eventualne supstitucije varijabli.

Zadatak 7. [15 bodova]

Riješite integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 2x + 3}\,\mathrm{d}x.$$

Zadatak 8. [10 bodova]

NASA je prikupila podatke o distribuciji temperature na toplinskom štitu oblika ravne metalne ploče koji štiti njezine letjelice prilikom ulaska u atmosferu. Distribucija temperature opisana je funkcijom $T(x,y) = 100\frac{x+y+1}{x^2-y^2}$. Odredite brzinu promjene temperature u smjeru vektora $v = \vec{i} + 2\vec{j}$.