

Pismeni ispit iz Diferencijalnog računa, ak. god (2017./2018.)

Zadatak 1. [20 bodova]

Dokaži da za svaku n -puta diferencijabilnu funkciju vrijedi

$$\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right),$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ za koji je gornji izraz dobro definiran.

Zadatak 2. [20 bodova]

Ispitajte konvergenciju niza zadanog općim članom

$$a_n = \frac{\ln n}{n}.$$

Ako je niz (a_n) konvergentan, odredite mu limes.

Zadatak 3. [20 bodova]

Dokažite da za svaki $x > 0$ vrijedi nejednakost

$$\frac{2x - x^2}{2} < \ln(x + 1) < x.$$

Zadatak 4. [20 bodova]

Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Odredite limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!}.$$

Zadatak 5. [20 bodova]

Koja su rješenja jednadžbe

$$x^n + y^n = (x + y)^n, \quad n \in \mathbb{N}?$$