Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

grupa A

Prvi kolokvij iz Diferencijalnog računa
28.11.2017.

1. [**5 bod.**] Dokažite da je za svaki prirodni broj n broj $4^{n+1} + n^3 - n + 2$ djeljiv sa 6.

2. Zadani su skupovi $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}$, na sljedeći način: skup S_1 jednak je skupu svih gomilišta niza (a_n), gdje je $a_n = 2 + \cos\frac{n\pi}{3}$, a skup $S_2 = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |2x + 7| \geq 13\}$.

   a) [**5 bod.**] Pomoću intervala napišite skupove S_1 i S_2.

   b) [**2 bod.**] Odredite $S_1 \cup S_2$.

   c) Ako postoje, odredite:

   c1) [**2 bod.**] $\inf(S_1 \cup S_2)$ c2) [**2 bod.**] $\sup(S_1 \cup S_2)$
   c3) [**2 bod.**] $\min(S_1 \cup S_2)$ c4) [**2 bod.**] $\max(S_1 \cup S_2)$.

3. [**15 bod.**] Odredite skupove D i K tako da funkcija $f : D \to K$ definirana formulom $f(x) = \ln\dfrac{2-x}{x+5}$ bude bijekcija, a zatim odredite njenu inverznu funkciju.

4. [**15 bod.**] Dokažite da je niz (a_n) zadan s $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{1}{9}(a_{n-1}^2 + 20)$, $n \geq 2$, omeđen i monoton te mu odredite limes.

5. [**15 bod.**] Neka je $a_n = \dfrac{2n-1}{4n+1}$. Odredite L takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Pokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da je
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$
Specijalno, odredite $n_0(0.01)$.

6. Izračunajte limese sljedećih nizova:

   a)[**10 bod.**] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+...+(n+1)}{n^2}$ b)[**5 bod.**] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+5}{n^2+7}\sin n$

   c)[**5 bod.**] $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2-5}\right)$ d)[**5 bod.**] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+1)! + (3n+2)!}{(3n+3)!}$

   e)[**5 bod.**] $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+7}{n^2+4}\right)^{2n^2+11}$ f)[**5 bod.**] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 3^n - 3\cdot 7^n}{3^{n+2}+7^n}$.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

grupa B

Prvi kolokvij iz Diferencijalnog računa
28.11.2017.

1. [**5 bod.**] Dokažite da je za svaki prirodni broj n broj $4^{n+1} + 15n + 14$ djeljiv s 9.

2. Zadani su skupovi $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}$, na sljedeći način: skup S_1 jednak je skupu svih gomilišta niza (a_n), gdje je $a_n = 1 - \cos\frac{n\pi}{3}$, a skup $S_2 = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |3x + 7| \geq 10\}$.

   a) [**5 bod.**] Pomoću intervala napišite skupove S_1 i S_2.

   b) [**2 bod.**] Odredite $S_1 \cup S_2$.

   c) Ako postoje, odredite:

   c1) [**2 bod.**] $\inf(S_1 \cup S_2)$ c2) [**2 bod.**] $\sup(S_1 \cup S_2)$
   c3) [**2 bod.**] $\min(S_1 \cup S_2)$ c4) [**2 bod.**] $\max(S_1 \cup S_2)$.

3. [**15 bod.**] Odredite skupove D i K tako da funkcija $f : D \to K$ definirana formulom $f(x) = \log\dfrac{3-x}{x+6}$ bude bijekcija, a zatim odredite njenu inverznu funkciju.

4. [**15 bod.**] Dokažite da je niz (a_n) zadan s $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{1}{7}(a_{n-1}^2 + 12)$, $n \geq 2$, omeđen i monoton te mu odredite limes.

5. [**15 bod.**] Neka je $a_n = \dfrac{4n+1}{2n-1}$. Odredite L takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Pokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

   Specijalno, odredite $n_0(0.01)$.

6. Izračunajte limese sljedećih nizova:

   a)[**10 bod.**] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+...+(n-1)}{3n^2}$

   b)[**5 bod.**] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+4}{n^2+6}\cos n$

   c)[**5 bod.**] $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n^2+7} - \sqrt{3n^2-5}\right)$

   d)[**5 bod.**] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4n+1)! + (4n+2)!}{(4n+3)!}$

   e)[**5 bod.**] $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+5}{n^2+3}\right)^{3n^2+11}$

   f)[**5 bod.**] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7\cdot 5^n - 4\cdot 9^n}{5^{n+2}+9^n}$.