Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
17. travnja 2019.

Prva kontrolna zadaća iz Kombinatorne i diskretne matematike

B grupa

Zadatak 1. (20 bodova)
Za okruglim stolom pravilno je raspoređeno 19 muškaraca i 21 žena. Dokažite da, kako god oni sjeli za stol, uvijek postoje barem dvije žene koje sjede jedna nasuprot drugoj.

Zadatak 2. (20 bodova)
Na policu u gradskoj knjižnici potrebno je složiti 6 ljubavnih i 5 kriminalističkih romana. Na koliko načina knjižničar može posložiti romane na policu ako:
a) nema nikakvih uvjeta,
b) svi ljubavni romani moraju biti složeni zajedno i svi kriminalistički romani moraju biti složeni zajedno,
c) svi ljubavni romani moraju biti složeni zajedno,
d) ljubavni romani moraju biti složeni na prva 3 i na zadnja 3 mjesta?

Rješenje: a) Obzirom nema uvjeta na razmještaj, svih 11 romana permutiramo na 11! načina.
b) Ljubavne i kriminalističke romane promatramo kao dva bloka. Unutar bloka, ljubavne romane možemo razmjestiti na 6!, a kriminalističke na 5! načina. Dodatno, blokovi mogu biti složeni kao (ROM, KRIMI) ili (KRIMI, ROM). Rj: $2 * 5! * 6!$.
c) Ljubavne romane promatramo kao blok koji može početi na i-tom mjestu, $i = 1, \ldots, 6$ na polici. Unutar bloka, mogu se razmjestiti na 6! načina, dok se kriminalistički romani na preostale pozicije mogu razmjestiti na 5! načina. Rj: $6 * 6! * 5!$.
d) Najprije odaberemo koje od 6 ljubavnih romana treba staviti na prva tri mjesta na $\binom{6}{3}$ načina. Svaki od blokova ljubavnih romana možemo permutirati redom na 3! načina. Preostale romane možemo permutirati na 5! načina. Rj: $\binom{6}{6} * 3! * 3! * 5!$.

Zadatak 3. (20 bodova)
Na koliko načina šest obitelji, od kojih svaku čine muškarac, žena i dvoje djece može sjesti za okrugli stol s neoznačenim sjedištima ako:
a) svaka obitelj želi sjediti zajedno;
b) žene iz nekog razloga zahtijevaju da sjede na nekim od 7 unaprijed odabranim mjestima koja se sva nalaze na istoj polovici stola;
c) muškarci žele sjediti zajedno i pričati o nogometu, dok svaka žena želi sjediti između svoje dvoje djece?

Rješenje: a) Svaku obitelj promatramo kao blok, te 6 bloka ciklički permutiramo na 5! načina. Unutar svakog bloka, članove pojedine obitelji permutiramo na 4! načina. Rj: $5! * (4!)^6$.
b) S obzirom da smo fiksirali mjesta na kojima sjede žene na jednoj polovici stola, više se ne radi o cikličkoj permutaciji, Najprije izaberemo na koja će 6, od označenih 7 mjesta sjesti žene na $\binom{7}{6}$ načina, te ih još permutiramo na 6! načina. Na preostala mjesta smjestimo na $(24 - 6)!$ razmjestimo muškarce i djecu. Rj: $\binom{7}{6} * 6! * 18!$.
c) Muškarce promatramo kao blok od 6 elementa, te svaku ženu sa svoje dvoje djece promatramo kao blok od 3 elementa. Tih 7 blokova ciklički permutiramo na 6! načina. Muškarce unutar bloka razmjestimo na 6! načina, a svaki od blokova žena i djece na 2 načina $(D_1, \check{Z}, D_2)$ ili $(D_2, \check{Z}, D_1)$. Rj: $6! * 6! * 2^6$.

Zadatak 4. (20 bodova)
Koliko je četveroznamenkastih brojeva čija je suma znamenaka jednaka 9?

Rješenje: Svaki četveroznamenkasti broj se sastoji od 4 znamenke x_1, x_2, x_3, x_4, takvih da prva znamenka nije 0. Preciznije, gledamo uređenu četvorku (x_1, x_2, x_3, x_4), $1 \leq x_1 \leq 9$, $0 \leq x_2, \ldots, x_4 \leq 9$.

Suma znamenaka četveroznamenkastog broja će biti 9 ako je $x_1 + \cdots + x_4 = 9$. Dakle, takvih će brojeva biti onoliko koliko i cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$\begin{aligned} &x_1 + \cdots + x_4 = 9 \\ &x_1 \geq 1, \\ &x_2, \ldots, x_4 \geq 0, \\ &x_1, \ldots, x_4 \leq 9. \end{aligned}$$

Zbog, $x_1 + \cdots + x_4 = 9$, posljednji uvjet možemo izostaviti, pa će takvih brojeva biti koliko i cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$\begin{aligned} &x_1 + \cdots + x_4 = 9 \\ &x_1 \geq 1, \\ &x_2, \ldots, x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

odnosno jednadžbe

$$\begin{aligned} &y_1 + \cdots + y_4 = 8 \\ &y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4, \end{aligned}$$

a takvih je $\binom{11}{3}$.

Zadatak 5. (20 bodova)
Za koje $n \in \mathbb{N}$ je suma

$$\sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} (-1)^k \binom{n}{2k-1} = 0?$$

Rješenje: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} (-1)^k \binom{n}{2k-1} = -\binom{n}{1} + \binom{n}{3} - \binom{n}{5} + \ldots (-1)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \binom{n}{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$, pri čemu je izraz $2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ jednak $n-1$ ako je n paran, odnosno n ako je n neparan. Dodatno, $(1-i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-i)^k$, pa je $\mathrm{Im}((1-i)^n) = -1\left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots + (-1)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\binom{n}{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}\right)$, jer je $i^{2k} \in \mathbb{R}$. Tražimo one n za koje je $\mathrm{Im}((1-i)^n) = 0$, a to su brojevi oblika $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$.

Zadatak 6. DODATNI ZADATAK (20 bodova)
Neka je n prirodan broj, $n \geq 3$. Koliko je različitih sumanada u razvoju od $(x_1 + \cdots + x_k)^n$ u kojima se svaki x_i, $i = 1, \ldots, n$ pojavljuje s potencijom većom ili jednakom 3?