



M102 Kombinatorna i diskretna matematika

Vježbe 5

26.03.2019.



Permutacije s ponavljanjem

Definicija 1

Uređenu k -torku (x_1, x_2, \dots, x_k) ne nužno različitih elemenata skupa S nazivamo k -permutacijom s ponavljanjem.

Primjer 1

Nadite sve 2-permutacije s ponavljanjem skupa $A = \{a, b, c\}$.





Permutacije s ponavljanjem

Definicija 1

Uređenu k -torku (x_1, x_2, \dots, x_k) ne nužno različitih elemenata skupa S nazivamo k -permutacijom s ponavljanjem.

Primjer 1

Nadite sve 2-permutacije s ponavljanjem skupa $A = \{a, b, c\}$.





Permutacije s ponavljanjem

Broj k -permutacija s ponavljanjem skupa od n elemenata

Prvi član uređene k -torke možemo odabrati na n načina, drugi također na n načina (jer se elementi mogu ponavljati), . . . , k -ti element također možemo birati na n načina, odnosno uređenu k -torku možemo odabrati na n^k načina.

Primjer 2

Na koliko načina možemo 6 vrsta voća kojeg imamo u neograničenim količinama podijeliti između 10 djece tako da svako dijete dobije po jedan komad voća?





Permutacije s ponavljanjem

Broj k -permutacija s ponavljanjem skupa od n elemenata

Prvi član uređene k -torke možemo odabrati na n načina, drugi također na n načina (jer se elementi mogu ponavljati), . . . , k -ti element također možemo birati na n načina, odnosno uređenu k -torku možemo odabrati na n^k načina.

Primjer 2

Na koliko načina možemo 6 vrsta voća kojeg imamo u neograničenim količinama podijeliti između 10 djece tako da svako dijete dobije po jedan komad voća?





Permutacija multiskupa

- $\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ -multiskup čiji međusobno različiti elementi a_1, a_2, \dots, a_k imaju konačne kratnosti redom n_1, n_2, \dots, n_k
- $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_k\}$ -multiskup čiji međusobno različiti elementi a_1, a_2, \dots, a_k imaju beskonačne kratnosti

Definicija 2

Neka je M multiskup i $r \in \mathbb{N}$. Tada je r -permutacija od M uređena r -torka (x_1, x_2, \dots, x_r) elemenata od M .





Permutacija multiskupa

Zadatak 3

Koliko ima 5-znamenkastih brojeva sastavljenih od znamenaka 0, 2, 3 i 4 ?





Permutacija multiskupa

Teorem 3

Neka je M multiskup koji sadrži k različitih elemenata s konačnim kratnostima n_1, n_2, \dots, n_k , pri čemu $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Tada je broj permutacija od M jednak:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$





Permutacija multiskupa

Primjer 4

Koliko ima permutacija multiskupa $M = \{a, a, b, b, c, c, c\}$?

Zadatak 5

Koliko ima ternarnih nizova (nizova sastavljenih od znamenaka 0, 1 i 2) koji imaju dvije nule, tri jedinice i pet dvojki ?





Permutacija multiskupa

Primjer 4

Koliko ima permutacija multiskupa $M = \{a, a, b, b, c, c, c\}$?

Zadatak 5

Koliko ima ternarnih nizova (nizova sastavljenih od znamenaka 0, 1 i 2) koji imaju dvije nule, tri jedinice i pet dvojki ?





Permutacija multiskupa

Zadatak 6

Izračunajte koliko ima 4-znamenkastih brojeva koji se mogu načiniti od znamenaka 995242949 ?

(DZ) Zadatak 7

Koliko je peteroznamenkastih brojeva koji imaju iste znamenke kao i 10082 ?





Permutacija multiskupa

Zadatak 6

Izračunajte koliko ima 4-znamenkastih brojeva koji se mogu načiniti od znamenaka 995242949 ?

(DZ) Zadatak 7

Koliko je peteroznamenastih brojeva koji imaju iste znamenke kao i 10082 ?





Permutacija multiskupa

(DZ) Zadatak 8

Imamo n semafora. Svaki svijetli crveno, žuto i zeleno.

- Na koliko načina mogu svi svijetliti istovremeno ?
- Kao a), ali samo crvenom i zelenom bojom ?
- Kao a), ali ako prvih k semafora ima samo crvenu i zelenu boju ?





Permutacija multiskupa

(DZ) Zadatak 8

Imamo n semafora. Svaki svijetli crveno, žuto i zeleno.

- Na koliko načina mogu svi svijetliti istovremeno ?
- Kao a), ali samo crvenom i zelenom bojom ?
- Kao a), ali ako prvih k semafora ima samo crvenu i zelenu boju ?





Permutacija multiskupa

(DZ) Zadatak 8

Imamo n semafora. Svaki svijetli crveno, žuto i zeleno.

- Na koliko načina mogu svi svijetliti istovremeno ?
- Kao a), ali samo crvenom i zelenom bojom ?
- Kao a), ali ako prvih k semafora ima samo crvenu i zelenu boju ?





Kombinacije multiskupova

Definicija 4

Neka je M multiskup i $r \in \mathbb{N}_0$. Tada je r -kombinacija od M r -člani podmultiskup od M .

Primjer 9

Neka je $M = \{a, a, b, b, c\}$. Odredite sve moguće kombinacije od M .





Kombinacije multiskupova

Definicija 4

Neka je M multiskup i $r \in \mathbb{N}_0$. Tada je r -kombinacija od M r -člani podmultiskup od M .

Primjer 9

Neka je $M = \{a, a, b, b, c\}$. Odredite sve moguće kombinacije od M .





Kombinacije multiskupova

Teorem 5

Neka je M multiskup s k različitih elemenata od kojih svaki ima konačnu kratnost $n_i, i = 1, \dots, k$. Tada je ukupan broj svih mogućih kombinacija odnosno podmultiskupova od M jednak:

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1).$$

Teorem 6

Neka multiskup M ima točno n različitih elemenata od kojih svaki ima beskonačnu kratnost i neka je $r \in \mathbb{N}$. Tada je broj svih r -kombinacija od M jednak:

$$\binom{n+r-1}{r}.$$





Kombinacije multiskupova

Teorem 5

Neka je M multiskup s k različitih elemenata od kojih svaki ima konačnu kratnost $n_i, i = 1, \dots, k$. Tada je ukupan broj svih mogućih kombinacija odnosno podmultiskupova od M jednak:

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1).$$

Teorem 6

Neka multiskup M ima točno n različitih elemenata od kojih svaki ima beskonačnu kratnost i neka je $r \in \mathbb{N}$. Tada je broj svih r -kombinacija od M jednak:

$$\binom{n+r-1}{r}.$$





Kombinacije multiskupova

Zadatak 10

Na koliko načina možemo podijeliti n jednakih bombona među k djece ?





Kombinacije multiskupova

Teorem 7

Neka je M multiskup s n različitih elemenata od kojih svaki ima beskonačnu kratnost. Tada je broj r -kombinacija od M u kojima se svaki od n različitih elemenata pojavljuje barem jednom jednak:

$$\binom{r-1}{n-1}.$$





Kombinacije multiskupova

Zadatak 11

Na koliko načina možemo podijeliti n jednakih predmeta među k ljudi tako da svaka osoba dobije barem 1 predmet ?

Zadatak 12

Koliko rješenja ima jednačba $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ u skupu \mathbb{N}_0 ? A u skupu \mathbb{N} ?





Kombinacije multiskupova

Zadatak 11

Na koliko načina možemo podijeliti n jednakih predmeta među k ljudi tako da svaka osoba dobije barem 1 predmet ?

Zadatak 12

Koliko rješenja ima jednačba $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ u skupu \mathbb{N}_0 ? A u skupu \mathbb{N} ?





Kombinacije multiskupovaa

Zadatak 13

Na koliko načina možemo podijeliti 12 jabuka, 10 krušaka i 8 naranči na 5 djece tako da

- a) *svako dijete dobije barem 1 jabuku, 1 krušku i 1 naranču ?*
- b) *svako dijete dobije barem 1 jabuku ?*
- c) *svako dijete dobije barem 1 jabuku i barem 1 krušku ?*

Zadatak 14

*Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžba $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 50$,
 $x_1, x_4, x_5 \geq 0$, $2 \leq x_3 \leq 7$, $x_2 \geq 2$?*





Kombinacije multiskupovaa

Zadatak 13

Na koliko načina možemo podijeliti 12 jabuka, 10 krušaka i 8 naranči na 5 djece tako da

- a) svako dijete dobije barem 1 jabuku, 1 krušku i 1 naranču ?*
- b) svako dijete dobije barem 1 jabuku ?*
- c) svako dijete dobije barem 1 jabuku i barem 1 krušku ?*

Zadatak 14

*Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžba $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 50$,
 $x_1, x_4, x_5 \geq 0$, $2 \leq x_3 \leq 7$, $x_2 \geq 2$?*





Kombinacije multiskupovaa

Zadatak 13

Na koliko načina možemo podijeliti 12 jabuka, 10 krušaka i 8 naranči na 5 djece tako da

- a) svako dijete dobije barem 1 jabuku, 1 krušku i 1 naranču ?*
- b) svako dijete dobije barem 1 jabuku ?*
- c) svako dijete dobije barem 1 jabuku i barem 1 krušku ?*

Zadatak 14

*Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžba $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 50$,
 $x_1, x_4, x_5 \geq 0$, $2 \leq x_3 \leq 7$, $x_2 \geq 2$?*





Kombinacije multiskupovaa

Zadatak 13

Na koliko načina možemo podijeliti 12 jabuka, 10 krušaka i 8 naranči na 5 djece tako da

- a) svako dijete dobije barem 1 jabuku, 1 krušku i 1 naranču ?*
- b) svako dijete dobije barem 1 jabuku ?*
- c) svako dijete dobije barem 1 jabuku i barem 1 krušku ?*

Zadatak 14

*Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžba $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 50$,
 $x_1, x_4, x_5 \geq 0$, $2 \leq x_3 \leq 7$, $x_2 \geq 2$?*





Kombinacije multiskupovaa

Zadatak 13

Na koliko načina možemo podijeliti 12 jabuka, 10 krušaka i 8 naranči na 5 djece tako da

- a) svako dijete dobije barem 1 jabuku, 1 krušku i 1 naranču ?*
- b) svako dijete dobije barem 1 jabuku ?*
- c) svako dijete dobije barem 1 jabuku i barem 1 krušku ?*

Zadatak 14

Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžba $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 50$, $x_1, x_4, x_5 \geq 0$, $2 \leq x_3 \leq 7$, $x_2 \geq 2$?

