Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
11. lipnja 2019.

Druga kontrolna zadaća iz Kombinatorne i diskretne matematike

A grupa

Zadatak 1. (10+10 bodova)
Riješite sljedeće rekurzije:

a) $a_n - 3a_{n-1} = 2^n - 2a_{n-2}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 8$,

b) $b_n b_{n-1}^{-6} b_{n-2}^{9} = \left(3^{3^n}\right)^n$, $a_0 = 9$, $a_1 = 27$.

Rješenje: a) Klasična nehomogena linearna rekurzija s konstantnim koeficijentima. Rj: $a_n = (2n + 1)2^n + 2$.
b) Logaritmiranjem rekurzije logaritmom s bazom 3, te uz supstituciju $a_n = \log_3(b_n)$, prelazimo na linearnu rekurziju $a_n - 6a_{n-1} + a_{n-2} = n3^n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ po a_n. Rj: $a_n = \frac{3^{n-1}}{2}(n^3 + 3n^2 - 10n + 12)$. Slijedi $b_n = 3^{a_n}$.
Zadatak 2. (20 bodova)
Na koliko načina možemo ploču dimenzija $1 \times n$ popločati pločicama dimenzija 1×1 i 1×2?

Rješenje: Neka je J_n broj načina iz zadatka. Promotrimo prvu pločicu. Ukoliko je ona dimenzija 1×1 ostatak ploče možemo popločati na J_{n-1} načina, a ukoliko je ona dimenzija 1×2 onda ostatak možemo popločati na J_{n-2} načina. Dakle, vrijedi rekurzija $J_n = J_{n-1} + J_{n-2}$. Početni uvjeti su $J_1 = 1$, $J_2 = 2$. Preostaje nam samo za primjetiti da je $J_n = F_{n+1}$, gdje je $(F_n)_{n\mathbb{N}}$ Fibonaccijev niz.

Zadatak 3. (20 bodova)
Neko n-člano društvo odlučilo je otići na večeru u restoran. Poznato je da se dobro jede u restoranu "Riba", gdje im je na raspolaganju r ribljih specijaliteta, zatim u vegetarijanskom restoranu "Vege", gdje nude v specijaliteta od povrća, te u restoranu "Ovca", gdje se može kušati o specijaliteta s ovčjim sirom. Pretpostavimo da će cijelo društvo jesti u istom restoranu, te da će svaka osoba naručiti točno jedno jelo. Odredite funkciju izvodnicu niza (a_n), gdje je a_n broj načina na koje n osoba mogu naručiti jelo.

Rješenje: To društvo može u prvom restoranu izabrati jelo na r^n načina, u drugom na v^n , u trećem na o^n. Ukupni broj načina izbora iznosi $r^n + v^n + o^n$, pa je funkcija izvodnica:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0}(r^n + v^n + o^n)x^n = \frac{1}{1 - rx} + \frac{1}{1 - vx} + \frac{1}{1 - ox}.$$

Zadatak 4. (20 bodova)
Pronađite običnu funkciju izvodnicu za niz rješenja rekurzivne relacije: $a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

Rješenje: Izraz ćemo pomožiti s x^{n+2}, te rezultat pripremiti za zbrajanje. Zbrajanjem po $n \in \mathbb{N}$ te uvrštavanjem početnih uvjeta i sređivanjem slijedi $a(x) - a_0 - a_1 x + 5x(a(x) - a_0) + 6x^2 a(x) = 0$, gdje je $a(x)$ FI niza (a_n). Slijedi

$$a(x) = \frac{1 + 6x}{1 + 5x + 6x^2}$$

Zadatak 5. (20 bodova)
a) Nacrtajte graf G čija je matrica susjedstva

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Grafu G odredite niz stupnjeva i struk. Je li graf povezan? Jednostavan? Možete li mu odrediti komplement? Sve odgovore detaljno obrazložite!
b) Neka je G graf pozitivnog struka manjeg od 3. Dokažite da G nije jednostavan.

Rješenje:a) Niz stupnjeva je $(6, 5, 4, 3, 2, 0)$, a struk 1. G nije povezan, niti jednostavan pa mu ne možemo odrediti komplement. (Operacija komplementiranja definirana je samo za jednostavne grafove).
b) Graf struka 1 ima petlju, dok graf struka 2 sadrži višestruke bridove, dakle, takav graf ne može biti jednostavan.

Zadatak 6. DODATNI ZADATAK (20 bodova)
Dokažite da u grupi od 50 ljudi postoje barem dvije osobe koje imaju jednak broj prijatelja unutar te grupe.