Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
11. lipnja 2019.

Druga kontrolna zadaća iz Kombinatorne i diskretne matematike

B grupa

Zadatak 1. (10+10 bodova)
Riješite sljedeće rekurzije:

a) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n3^n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$,

b) $b_{n+1}b_n^{-5} = 64 \cdot 16^{n^2} \cdot 4^n$, $a_1 = 2$.

Rješenje: a) Klasična nehomogena linearna rekurzija s konstantnim koeficijentima. Rj: $a_n = \frac{3^{n-1}}{2}(n^3 + 3n^2 - 10n + 12)$.
b) Logaritmiranjem rekurzije logaritmom s bazom 2, te uz supstituciju $a_n = \log_2(b_n)$, prelazimo na linearnu rekurziju $a_n - 6a_{n-1} + a_{n-2} = 4n^2 + 2n + 6$, $a_1 = 1$, po a_n. Rj: $a_n = 5^n - n^2 - n - 2$. Slijedi $b_n = 2^{a_n}$.

Zadatak 2. (20 bodova)
Na koliko maksimalno područja n pravaca dijeli ravninu?

Rješenje: Zanima nas maksimalni broj, stoga možemo pretpostaviti da nikoja dva pravca nisu paralelna i da se nikoja tri ne sijeku u istoj točki. Označimo s a_n traženi broj. Kada na $n-1$ pravac dodamo još jedan, dobivamo n dijelova ravnine više no što smo imali. Očito je $a_1 = 2$, dakle, trebamo riješiti $a_n = a_{n1} + n$, $a_1 = 2$. Slijedi da je $a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Zadatak 3. (20 bodova)
Na školskim priredbama sudjeluju pjevači, mali i veliki plesači, te ponekad glumci. Treba naći funkciju izvodnicu za broj različitih sastava za školske priredbe složene prema broju izvođača ako je bitan bitan samo broj učenika u pojedinoj skupini. Svako dijete može preuzeti najviše jednu ulogu. Pjevača treba biti barem 30, broj velikih plesača treba biti djeljiv s 2, a broj malih plesača mora biti djeljiv s 3. Pretpostavimo da škole imaju po 1000 učenika koji mogu pjevati i glumiti, dok po 500 djece može biti uključeno u grupu velikih, odnosno malih plesača, pri čemu i veliki i mali plesači moraju sudjelovati u priredbi.

Rješenje: Uzimamo barem 30 od raspoloživih 1000 pjevača, te proizvoljan broj glumaca od njih 1000 raspoloživih. Nadalje biramo pozitivan paran broj od raspoloživih 500 velikih plesača, te pozitivan broj malih plesača djeljiv s 3. Funkcija izvodnica:

$$f(x) = (x^{30} + ... + x^{1000})(x^0 + ... + x^{1000})(x^2 + x^4 ... + x^{500})(x^3 + x^6 ... + x^{498})$$
$$= \frac{x^{1036}(x^{971} - 1)(x^{498} - 1)(x^{500} - 1)(x^{101} - 1)}{(x-1)^2(x^2-1)(x^3-1)}.$$

Zadatak 4. (20 bodova)
Pronađite običnu funkciju izvodnicu za niz rješenja rekurzivne relacije: $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

Rješenje: Izraz ćemo pomožiti s x^{n+2}, te rezultat pripremiti za zbrajanje. Zbrajanjem po $n \in \mathbb{N}$ te uvrštavanjem početnih uvjeta i sređivanjem slijedi $a(x) - a_0 - a_1x - x(a(x) - a_0) - 2x^2a(x) = 0$, gdje je

$a(x)$ FI niza (a_n). Slijedi

$$a(x) = \frac{-1}{2x^2 + x - 1}$$

Zadatak 5. (20 bodova)
a) Nacrtajte graf G čija je matrica susjedstva

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Grafu G odredite niz stupnjeva i struk. Je li graf povezan? Jednostavan? Možete li mu odrediti komplement? Sve odgovore detaljno obrazložite!
b) Neka je G jednostavan graf s komponentama povezanosti $V_1, \ldots V_k$, pri čemu je $|V_i| = 1$ za neki $i \in \{1, ..., k\}$. Odredite determinantu matrice susjedstva od G.

Rješenje: a) Niz stupnjeva je $(6, 6, 4, 4, 2, 1)$, a struk 1. G je povezan, ali nije jednostavan pa mu ne možemo odrediti komplement. (Operacija komplementiranja definirana je samo za jednostavne grafove).
b) G jednostavan, dakle ne sadrži petlje. Kako je $|V_i| = 1$ u G postoji izolirani vrh, što se u matrici susjedstva evidentira nul stupcem. Dakle, determinanta je 0.

Zadatak 6. DODATNI ZADATAK (20 bodova)
Dokažite da u grupi od 100 ljudi postoje barem dvije osobe koje imaju jednak broj prijatelja unutar te grupe.