



# M102 Kombinatorna i diskretna matematika

## Vježbe 9

14.05.2019



## Funkcije izvodnice

### Primjer 1

Odredite funkciju izvodnicu za niz  $(a_n)_{n \geq 0}$  ako je:

a)  $a_n = 1,$

b)  $a_n = n,$

c)  $a_n = n^2,$

d)  $a_n = \binom{\alpha}{n}, \alpha \in \mathbb{R}.$





## Funkcije izvodnice

### Primjer 1

Odredite funkciju izvodnicu za niz  $(a_n)_{n \geq 0}$  ako je:

a)  $a_n = 1,$

b)  $a_n = n,$

c)  $a_n = n^2,$

d)  $a_n = \binom{\alpha}{n}, \alpha \in \mathbb{R}.$





## Funkcije izvodnice

### Primjer 1

Odredite funkciju izvodnicu za niz  $(a_n)_{n \geq 0}$  ako je:

a)  $a_n = 1,$

b)  $a_n = n,$

c)  $a_n = n^2,$

d)  $a_n = \binom{\alpha}{n}, \alpha \in \mathbb{R}.$





## Funkcije izvodnice

### Primjer 1

Odredite funkciju izvodnicu za niz  $(a_n)_{n \geq 0}$  ako je:

- a)  $a_n = 1$ ,
- b)  $a_n = n$ ,
- c)  $a_n = n^2$ ,
- d)  $a_n = \binom{\alpha}{n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .





## Funkcije izvodnice

### Primjer 2

Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za niz  $(a_n)_{n \geq 0}$  ako je:

a)  $a_n = c, c \in \mathbb{R},$

b)  $a_n = c^n, c \in \mathbb{R},$

c)  $a_n = n,$

d)  $a_n = n!.$





## Funkcije izvodnice

### Primjer 2

Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za niz  $(a_n)_{n \geq 0}$  ako je:

a)  $a_n = c, c \in \mathbb{R},$

b)  $a_n = c^n, c \in \mathbb{R},$

c)  $a_n = n,$

d)  $a_n = n!.$





## Funkcije izvodnice

### Primjer 2

Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za niz  $(a_n)_{n \geq 0}$  ako je:

- a)  $a_n = c, c \in \mathbb{R},$
- b)  $a_n = c^n, c \in \mathbb{R},$
- c)  $a_n = n,$
- d)  $a_n = n!.$







## Funkcije izvodnice

### Primjer 2

Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za niz  $(a_n)_{n \geq 0}$  ako je:

- a)  $a_n = c, c \in \mathbb{R},$
- b)  $a_n = c^n, c \in \mathbb{R},$
- c)  $a_n = n,$
- d)  $a_n = n!.$





## Funkcije izvodnice

### Zadatak 3

Odredite broj rješenja jednadžbe  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ , ako je  $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ .

### Zadatak 4

Odredite FI za broj kombinacija multiskupa  $\{a^{10}, b^7, c^{12}\}$  te odredite koliko ima 15-kombinacija.





## Funkcije izvodnice

### Zadatak 3

Odredite broj rješenja jednadžbe  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ , ako je  $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ .

### Zadatak 4

Odredite FI za broj kombinacija multiskupa  $\{a^{10}, b^7, c^{12}\}$  te odredite koliko ima 15-kombinacija.





## Funkcije izvodnice

### Zadatak 5

*Na koliko načina možemo 24 jednakih bombona podijeliti među 4 djece tako da svako dijete dobije barem 3, ali ne više od 8 bombona?*

### Zadatak 6

*Nađite broj rješenja jednadžbe  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ , ako je  $x_1, x_2 \geq -3$ ,  $-5 \leq x_3 \leq 5$  i  $x_4 \geq 0$ ,  $x_i \in \mathbb{Z}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .*





## Funkcije izvodnice

### Zadatak 5

*Na koliko načina možemo 24 jednakih bombona podijeliti među 4 djece tako da svako dijete dobije barem 3, ali ne više od 8 bombona?*

### Zadatak 6

*Nađite broj rješenja jednadžbe  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ , ako je  $x_1, x_2 \geq -3$ ,  $-5 \leq x_3 \leq 5$  i  $x_4 \geq 0$ ,  $x_i \in \mathbb{Z}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .*





## Funkcije izvodnice

### (DZ) Zadatak 7

*Neka su  $k, n, r \in \mathbb{N}$ . Nađite broj cjelobrojnih rješenja jednačbe  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ , tako da je  $0 \leq x_i \leq k, i = 1, \dots, n$ .*

### Zadatak 8

*Na raspolaganju imamo 4 kovanice od 1 kn, 7 kovanica od 2 kn, 2 kovanice od 5 kn te 1 novčanicu od 10 kn. Odredite FI za broj načina isplate svote od 17 kn.*





## Funkcije izvodnice

### (DZ) Zadatak 7

*Neka su  $k, n, r \in \mathbb{N}$ . Nađite broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ , tako da je  $0 \leq x_i \leq k, i = 1, \dots, n$ .*

### Zadatak 8

*Na raspolaganju imamo 4 kovanice od 1 kn, 7 kovanica od 2 kn, 2 kovanice od 5 kn te 1 novčanicu od 10 kn. Odredite FI za broj načina isplate svote od 17 kn.*





## Funkcije izvodnice

### Zadatak 9

*Koliko ima riječi duljine 4 sastavljenih od slova B,A,N,A,N,A?*

### (DZ) Zadatak 10

*Treba odrediti EFi za broj riječi duljine  $n$  sastavljenih od slova iz multiskupa  $\{A^\infty, B^\infty, C^2\}$  koje sadrže barem dva slova A i paran broj slova B. Izračunajte broj takvih riječi za  $n = 10$ .*







## Funkcije izvodnice

### Zadatak 9

*Koliko ima riječi duljine 4 sastavljenih od slova B,A,N,A,N,A?*

### (DZ) Zadatak 10

*Treba odrediti EFi za broj riječi duljine  $n$  sastavljenih od slova iz multiskupa  $\{A^\infty, B^\infty, C^2\}$  koje sadrže barem dva slova A i paran broj slova B. Izračunajte broj takvih riječi za  $n = 10$ .*





## Rekurzije i FI

### Zadatak 11

*Riješite rekurziju te pronađite pripadnu funkciju izvodnicu za niz*

$$a_n = \frac{1}{4}a_{n+1} + a_{n-1}, a_0 = -\frac{1}{4}, a_1 = 1.$$

### Zadatak 12

*Nađite FI za niz  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^{n-1}, n \geq 3$   
,  $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ .*





## Rekurzije i FI

### Zadatak 11

Riješite rekurziju te pronađite pripadnu funkciju izvodnicu za niz

$$a_n = \frac{1}{4}a_{n+1} + a_{n-1}, a_0 = -\frac{1}{4}, a_1 = 1.$$

### Zadatak 12

Nadite FI za niz  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^{n-1}, n \geq 3$   
,  $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ .

