



M102 Kombinatorna i diskretna matematika

Vježbe 1

26.02.2019.



Dirichletov princip - slaba forma

Ako $n + 1$ predmeta proizvoljno rasporedimo u n kutija, tada barem jedna kutija sadrži barem dva predmeta.

Teorem 1

Neka su S i T konačni skupovi takvi da $|S| > |T|$, a $f : S \rightarrow T$ neko preslikavanje. Tada f nije injekcija, tj. $\exists x, x' \in S, x \neq x'$ takvi da $f(x) = f(x')$.





Dirichletov princip - slaba forma

Ako $n + 1$ predmeta proizvoljno rasporedimo u n kutija, tada barem jedna kutija sadrži barem dva predmeta.

Teorem 1

Neka su S i T konačni skupovi takvi da $|S| > |T|$, a $f : S \rightarrow T$ neko preslikavanje. Tada f nije injekcija, tj. $\exists x, x' \in S, x \neq x'$ takvi da $f(x) = f(x')$.





Dirichletov princip - slaba forma

Zadatak 2

Dokažite da na studentskom tulumu, na kojemu je $n \geq 2$ studenata, postoje dva studenta koji imaju jednak broj prijatelja.





Dirichletov princip - slaba forma

Zadatak 3

Dokažite da ako odaberemo 7 različitih brojeva iz skupa $\{1, 2, \dots, 11\}$, onda sigurno postoje barem dva broja čija suma iznosi 12.

Zadatak 4

Matrica 5×5 proizvoljno je popunjena elementima iz skupa $\{-1, 0, 1\}$. Izračunamo li sumu po svim retcima, stupcima i na obje dijagonale, onda među tim sumama postoje dvije jednake. Dokažite!





Dirichletov princip - slaba forma

Zadatak 3

Dokažite da ako odaberemo 7 različitih brojeva iz skupa $\{1, 2, \dots, 11\}$, onda sigurno postoje barem dva broja čija suma iznosi 12.

Zadatak 4

Matrica 5×5 proizvoljno je popunjena elementima iz skupa $\{-1, 0, 1\}$. Izračunamo li sumu po svim retcima, stupcima i na obje dijagonale, onda među tim sumama postoje dvije jednake. Dokažite!





Dirichletov princip - slaba forma

...malo geometrije...

Zadatak 5

Unutar jednakostraničnog trokuta stranice duljine 1 zadano je 10 točaka. Dokažite da među njima postoje dvije čija je međusobna udaljenost najviše $\frac{1}{3}$.

Zadatak 6

Unutar kvadrata stranice duljine 70 cm proizvoljno je raspoređeno 50 točaka. Dokažite da među njima postoje dvije točke čija je međusobna udaljenost manja od 15 cm.





Dirichletov princip - slaba forma

...malo geometrije...

Zadatak 5

Unutar jednakostraničnog trokuta stranice duljine 1 zadano je 10 točaka. Dokažite da među njima postoje dvije čija je međusobna udaljenost najviše $\frac{1}{3}$.

Zadatak 6

Unutar kvadrata stranice duljine 70 cm proizvoljno je raspoređeno 50 točaka. Dokažite da među njima postoje dvije točke čija je međusobna udaljenost manja od 15 cm.





Dirichletov princip - slaba forma

(DZ) Zadatak 7

Dokažite da ako proizvoljno rasporedimo 5 točkaka u nutrinu jediničnog kvadrata, onda sigurno postoje dvije točke čija je međusobna udaljenost manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a ako proizvoljno rasporedimo 8 točkaka unutar jediničnog kvadrata, onda postoje dvije točke čija je međusobna udaljenost manja od $\frac{\sqrt{5}}{4}$.





Dirichletov princip - slaba forma

...malo teorije brojeva...

Zadatak 8

Dokažite da među 20 prirodnih brojeva postoje 2 broja čija je razlika djeljiva s 19.

Zadatak 9

U skupu $S = \{1, 2, \dots, 200\}$ uvijek možemo odabrati 101 brojeva sa svojstvom da među njima postoje dva broja takva da jedan dijeli drugoga.





Dirichletov princip - jaka forma

Poopćenje slabog principa:

- 1 ako $2n + 1$ predmeta rasporedimo u n kutija, tada će barem jedna kutija sadržavati barem 3 predmeta,
- 2 ako $3n + 1$ predmeta rasporedimo u n kutija, tada će barem jedna kutija sadržavati barem 4 predmeta,...
- 3 ako $(r - 1)n + 1$ predmeta rasporedimo u n kutija, tada će barem jedna kutija sadržavati barem r predmeta.

Teorem 10

Ako je m predmeta razmješteno u n kutija, tada barem jedna kutija sadrži barem $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ predmeta.





Dirichletov princip - jaka forma

Poopćenje slabog principa:

- 1 ako $2n + 1$ predmeta rasporedimo u n kutija, tada će barem jedna kutija sadržavati barem 3 predmeta,
- 2 ako $3n + 1$ predmeta rasporedimo u n kutija, tada će barem jedna kutija sadržavati barem 4 predmeta,...
- 3 ako $(r - 1)n + 1$ predmeta rasporedimo u n kutija, tada će barem jedna kutija sadržavati barem r predmeta.

Teorem 10

Ako je m predmeta razmješteno u n kutija, tada barem jedna kutija sadrži barem $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ predmeta.





Dirichletov princip - jaka forma

Zadatak 11

Koliko brojnu skupinu ljudi trebamo imati da bismo sa sigurnošću mogli reći da među njima postoji k ljudi koji su rođeni istog dana u tjednu?

(DZ) Zadatak 12

Unutar kvadrata stranice duljine 1 nasumično je smješteno 9 točaka.

Dokažite da tada postoje 3 točke koje su sadržane u krugu polumjera $\frac{2}{5}$.





Dirichletov princip - jaka forma

Zadatak 11

Koliko brojnu skupinu ljudi trebamo imati da bismo sa sigurnošću mogli reći da među njima postoji k ljudi koji su rođeni istog dana u tjednu?

(DZ) Zadatak 12

Unutar kvadrata stranice duljine 1 nasumično je smješteno 9 točaka.

Dokažite da tada postoje 3 točke koje su sadržane u krugu polumjera $\frac{2}{5}$.





Dirichletov princip - jaka forma

Zadatak 11

Koliko brojnu skupinu ljudi trebamo imati da bismo sa sigurnošću mogli reći da među njima postoji k ljudi koji su rođeni istog dana u tjednu?

(DZ) Zadatak 12

Unutar kvadrata stranice duljine 1 nasumično je smješteno 9 točaka.

Dokažite da tada postoje 3 točke koje su sadržane u krugu polumjera $\frac{2}{5}$.





Dirichletov princip - jaka forma

(DZ) Zadatak 13

U ravnini je zadano 15 cjelobrojnih točaka. Dokažite da je polovište barem 4 dužine određene nekim parom tih točaka cjelobrojna točka.





Dirichletov princip - jaka forma

(DZ) Zadatak 14

Na raspolaganju su nam dvije ravne okrugle ploče različitih veličina. Svaka od njih je podijeljena na 200 sukladnih isječaka, a svi su isječci obojeni ili s crvenom ili s plavom bojom. Znamo da je 100 isječaka veće ploče obojeno crvenom, a preostalih 100 plavom bojom. Ako manju ploču položimo na veću tako da im se središta i isječci podudaraju, pokažite da postoji mogućnost da je broj isječaka manje ploče čija se boja podudara sa isječcima veće ploče najmanje jednak 100 !





Ramseyeva teorija

(DZ) Zadatak 15

Dokažite da za $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geq 2$ vrijedi $N(p, 2; 2) = p$ i $N(2, q; 2) = q$.

Zadatak 16

Dokažite da u skupini od 10 ljudi postoje ili 4 međusobna poznanika ili 3 međusobna neznanca.

(DZ) Zadatak 17

Dokažite $N(4, 3; 2) = 9$ (za ambicioznije studente).





Još zadataka s Dirichletovim principom!

(DZ) Zadatak 18

Na list papira u obliku pravokutnika $21\text{ cm} \times 30\text{ cm}$ nespretni učenik prolio je tuš tako da je ukupna površina svih mrlja jednaka 314 cm^2 . Dokažite da postoje dvije točke u čistom dijelu pravokutnika koje su simetrične u odnosu na jednu os simetrije pravokutnika.





Dirichletov princip

(DZ) Zadatak 19

16 *političara* vodilo je važne mirovne pregovore za okruglim stolom, sjedeći na istoj udaljenosti jedan od drugoga. Mjesto svakog *političara* označeno je karticom na stolu s njegovim imenom. Nakon dulje pauze i burnih rasprava, sudionici pregovora vratili su se u dvoranu i posjedali oko stola ne obazirući se na kartice. Ubrzo se ustanovilo da ni jedan od njih ne sjedi na svom mjestu. Može li se okretanjem stol dovesti u takav položaj da ispred barem dva *političara* stoje kartice sa njihovim imenima?





Dirichletov princip

(DZ) Zadatak 20

Zadane su točke A, B, C, D, E i F od kojih nikoje tri ne leže na jednom pravcu. Te točke određuju 15 dužina tako da su neke od njih obojane plavom, a neke crvenom bojom. Dokažite da postoji trokut s vrhovima u neke tri od zadanih točaka čije su sve tri stranice iste boje.

(DZ) Zadatak 21

Soba ima oblik kocke duljine brida 3 m. U njoj zuji 136 muha. Dokažite da se u svakom trenutku barem 6 muha može obuhvatiti sferom polumjera 9 dm.





Dirichletov princip

(DZ) Zadatak 20

Zadane su točke A, B, C, D, E i F od kojih nikoje tri ne leže na jednom pravcu. Te točke određuju 15 dužina tako da su neke od njih obojane plavom, a neke crvenom bojom. Dokažite da postoji trokut s vrhovima u neke tri od zadanih točaka čije su sve tri stranice iste boje.

(DZ) Zadatak 21

Soba ima oblik kocke duljine brida 3 m. U njoj zubi 136 muha. Dokažite da se u svakom trenutku barem 6 muha može obuhvatiti sferom polumjera 9 dm.

