

M014 Kombinatorna i diskretna matematika

Vježbe 2

05.03.2019



Osnovni principi prebrojavanja

Princip sume

Broj elemenata unije međusobno disjunktih skupova jednak je sumi broja elemenata tih skupova.

Ako su A_1, A_2, \dots, A_n skupovi za koje vrijedi

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j,$$

tada vrijedi

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$





Osnovni principi prebrojavanja

Primjer 1

Iz grada A u grad B možemo doći brodom, autom ili avionom. Postoje dva morska, dva cestovna i tri zračna puta. Na koliko načina možemo doći iz grada A u grad B ?





Osnovni principi prebrojavanja

Princip produkta

Za konačne skupove A_1, A_2, \dots, A_n vrijedi:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|.$$

Princip bijekcije (jednakosti)

Dva skupa A i B imaju jednak broj elemenata ako i samo ako postoji bijekcija između njih.





Osnovni principi prebrojavanja

Princip produkta

Za konačne skupove A_1, A_2, \dots, A_n vrijedi:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|.$$

Princip bijekcije (jednakosti)

Dva skupa A i B imaju jednak broj elemenata ako i samo ako postoji bijekcija između njih.





Osnovni principi prebrojavanja

Primjer 2

Da bismo došli iz grada A u grad D , moramo proći kroz gradove B i C . Iz grada A u grad B možemo doći na 2 načina, iz B u C na 5, a iz grada C u grad D na 3 načina. Na koliko načina možemo doći iz grada A u grad D ?





Osnovni principi prebrojavanja

Teorem o uzastopnom prebrojavanju

Neka je $n \in \mathbb{N}$, neka su S_1, S_2, \dots, S_n konačni skupovi, te neka je $S \subseteq S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ skup uređenih n -torki (x_1, x_2, \dots, x_n) definiran ovako:

prva komponenta x_1 može se izabrati na p_1 načina, drugu komponentu, x_2 , ovisno o izboru prve, možemo izabrati na p_2 načina, \dots , za svaki izbor komponentata x_1, x_2, \dots, x_{n-1} vrijedi da n -tu komponentu možemo izabrati na p_n načina.

Tada skup S ima $p_1 p_2 \cdots p_n$ elemenata.





Osnovni principi prebrojavanja

Zadatak 3

Registracijska oznaka vozila u RH sastoji se od 3 ili 4 znamenke i 1 ili 2 slova abecede (bez slova s kvačicama i bez dvoslova). Koliko ima takvih oznaka ako uzmemo u obzir jedno registracijsko područje?

Zadatak 4

Jedna hrvatska prodavaonica na svaki svoj proizvod stavlja kod od 6 simbola. Kod se sastoji redom od 4 znamenke i 2 slova (bez dvoslova i bez kvačica), prva je znamenka 5, a prvo slovo nije samoglasnik. Koliko je mogućih kodova?





Osnovni principi prebrojavanja

Zadatak 3

Registracijska oznaka vozila u RH sastoji se od 3 ili 4 znamenke i 1 ili 2 slova abecede (bez slova s kvačicama i bez dvoslova). Koliko ima takvih oznaka ako uzmemo u obzir jedno registracijsko područje?

Zadatak 4

Jedna hrvatska prodavaonica na svaki svoj proizvod stavlja kod od 6 simbola. Kod se sastoji redom od 4 znamenke i 2 slova (bez dvoslova i bez kvačica), prva je znamenka 5, a prvo slovo nije samoglasnik. Koliko je mogućih kodova?





Osnovni principi prebrojavanja

Zadatak 3

Registracijska oznaka vozila u RH sastoji se od 3 ili 4 znamenke i 1 ili 2 slova abecede (bez slova s kvačicama i bez dvoslova). Koliko ima takvih oznaka ako uzmemo u obzir jedno registracijsko područje?

Zadatak 4

Jedna hrvatska prodavaonica na svaki svoj proizvod stavlja kod od 6 simbola. Kod se sastoji redom od 4 znamenke i 2 slova (bez dvoslova i bez kvačica), prva je znamenka 5, a prvo slovo nije samoglasnik. Koliko je mogućih kodova?





Osnovni principi prebrojavanja

Zadatak 5

- Na koliko je načina na šahovskoj ploči moguće odabrati jedno bijelo i jedno crno polje?*
- Isto pitanje kao u a), ali sada tražimo da odabrana polja budu u različitim redovima i stupcima?*
- Na koliko načina možemo postaviti kralja na jedno polje šahovske ploče, a zatim odigrati potez?*
- Svaki igrač odigrao je sa svakim od preostalih jednu partiju šaha na nekom šahovskom turniru. Odigrano je ukupno 78 partija. Koliko je bilo igrača?*





Osnovni principi prebrojavanja

Zadatak 5

- Na koliko je načina na šahovskoj ploči moguće odabrati jedno bijelo i jedno crno polje?*
- Isto pitanje kao u a), ali sada tražimo da odabrana polja budu u različitim redovima i stupcima?*
- Na koliko načina možemo postaviti kralja na jedno polje šahovske ploče, a zatim odigrati potez?*
- Svaki igrač odigrao je sa svakim od preostalih jednu partiju šaha na nekom šahovskom turniru. Odigrano je ukupno 78 partija. Koliko je bilo igrača?*





Osnovni principi prebrojavanja

Zadatak 5

- a) *Na koliko je načina na šahovskoj ploči moguće odabrati jedno bijelo i jedno crno polje?*
- b) *Isto pitanje kao u a), ali sada tražimo da odabrana polja budu u različitim redovima i stupcima?*
- c) *Na koliko načina možemo postaviti kralja na jedno polje šahovske ploče, a zatim odigrati potez?*
- d) *Svaki igrač odigrao je sa svakim od preostalih jednu partiju šaha na nekom šahovskom turniru. Odigrano je ukupno 78 partija. Koliko je bilo igrača?*





Osnovni principi prebrojavanja

Zadatak 5

- a) *Na koliko je načina na šahovskoj ploči moguće odabrati jedno bijelo i jedno crno polje?*
- b) *Isto pitanje kao u a), ali sada tražimo da odabrana polja budu u različitim redovima i stupcima?*
- c) *Na koliko načina možemo postaviti kralja na jedno polje šahovske ploče, a zatim odigrati potez?*
- d) *Svaki igrač odigrao je sa svakim od preostalih jednu partiju šaha na nekom šahovskom turniru. Odigrano je ukupno 78 partija. Koliko je bilo igrača?*





Osnovni principi prebrojavanja

(DZ) Zadatak 6

Koliko dijagonala ima konveksan n -terokut?

Zadatak 7

Koliko je parnih brojeva između 100 i 1000 čija zadnja znamenka nije nula?





Osnovni principi prebrojavanja

(DZ) Zadatak 6

Koliko dijagonala ima konveksan n -terokut?

Zadatak 7

Koliko je parnih brojeva između 100 i 1000 čija zadnja znamenka nije nula?





Osnovni principi prebrojavanja

(DZ) Zadatak 8

Koliko je neparnih brojeva između 1000 i 10000 kojima su sve znamenke različite?

Zadatak 9

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od milijun koji sadrže barem jednu znamenku 6 ?

Zadatak 10

Neka su definirani skupovi $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ i $S = \{(a, b, c) : a, b, c \in X, a < b, a < c\}$. Koliki je $|S|$?





Osnovni principi prebrojavanja

(DZ) Zadatak 8

Koliko je neparnih brojeva između 1000 i 10000 kojima su sve znamenke različite?

Zadatak 9

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od milijun koji sadrže barem jednu znamenku 6 ?

Zadatak 10

Neka su definirani skupovi $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ i $S = \{(a, b, c) : a, b, c \in X, a < b, a < c\}$. Koliki je $|S|$?





Osnovni principi prebrojavanja

(DZ) Zadatak 8

Koliko je neparnih brojeva između 1000 i 10000 kojima su sve znamenke različite?

Zadatak 9

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od milijun koji sadrže barem jednu znamenku 6 ?

Zadatak 10

Neka su definirani skupovi $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ i $S = \{(a, b, c) : a, b, c \in X, a < b, a < c\}$. Koliki je $|S|$?

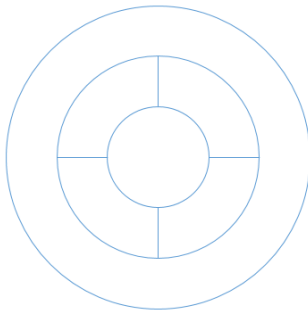




Osnovni principi prebrojavanja

(DZ) Zadatak 11

Zadan je geometrijski lik kao na slici. Na koliko načina možemo obojati dijelove njegove unutrašnjosti tako da svaka dva susjedna dijela obojamo različitim bojama? Na raspolaganju su 4 boje.





Osnovni principi prebrojavanja

Propozicija 1

- 1 *Broj svih funkcija s k -članog u n -člani skup je jednak n^k .*
- 2 *Broj svih injekcija s k -članog skupa u n -člani skup je $n^{\underline{k}} = n(n-1) \cdots (n-k+1)$.*
- 3 *Broj svih podskupova n -članog skupa je 2^n .*





Osnovni principi prebrojavanja

Zadatak 12

Na koliko načina možemo rasporediti r različitih predmeta u n kutija?

Zadatak 13

Na koliko načina možemo r različitih predmeta rasporediti u n kutija tako da barem jedna kutija sadrži barem 2 predmeta?





Osnovni principi prebrojavanja

Zadatak 12

Na koliko načina možemo rasporediti r različitih predmeta u n kutija?

Zadatak 13

Na koliko načina možemo r različitih predmeta rasporediti u n kutija tako da barem jedna kutija sadrži barem 2 predmeta?





Osnovni principi prebrojavanja

Zadatak 12

Na koliko načina možemo rasporediti r različnih predmeta u n kutija?

Zadatak 13

Na koliko načina možemo r različnih predmeta rasporediti u n kutija tako da barem jedna kutija sadrži barem 2 predmeta?





Osnovni principi prebrojavanja

Zadatak 14

Osnovni teorem aritmetike kaže da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje jedinstveni prosti brojevi p_1, p_2, \dots, p_k , $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ i prirodni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tako da $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Koliko različitih djelitelja uključujući 1 i n ima prirodan broj n ?

(DZ) Zadatak 15

Koliko je matrica veličine $m \times n$ popunjenih elementima skupa $S = \{0, 1, 2, 3\}$?





Osnovni principi prebrojavanja

Zadatak 14

Osnovni teorem aritmetike kaže da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje jedinstveni prosti brojevi p_1, p_2, \dots, p_k , $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ i prirodni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tako da $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Koliko različitih djelitelja uključujući 1 i n ima prirodan broj n ?

(DZ) Zadatak 15

Koliko je matrica veličine $m \times n$ popunjenih elementima skupa $S = \{0, 1, 2, 3\}$?

