Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
17. travnja 2019.

Prva kontrolna zadaća iz Kombinatorne i diskretne matematike

A grupa

Zadatak 1. (20 bodova)
Za okruglim stolom pravilno je raspoređeno 11 muškaraca i 9 žena. Dokažite da, kako god oni sjeli za stol, uvijek postoje barem dva muškarca koja sjede jedan nasuprot drugome.

Rješenje: Za okruglim stolom sjedi ukupno 20 ljudi, a kako su pravilno raspoređeni, 10 parova sjedi točno jedno nasuprot drugome. Definiramo ukupno 10 kutija, pri čemu u istu kutiju smještamo one muškarce koji sjede jedan nasuprot drugome. Kako imamo 11 muškaraca, to prema slaboj formi Dirichletovog principa postoje barem dva muškarca koja se nalaze u istoj kutiji, odnosno koji sjede točno jedan nasuprot drugome.

Zadatak 2. (20 bodova)
U jednoj trgovini dječje robe prodavačica ima zadatak smjestiti dječju odjeću na 9 vješalica poredanih u niz. Na koliko načina može objesiti 5 haljinica različitih boja i 4 dječjih košuljica različitih modela ako:
a) nema nikakvih uvjeta,
b) sve haljinice moraju biti jedna do druge i sve košuljice moraju biti jedna do druge,
c) sve haljinice moraju biti jedna do druge,
d) haljinice moraju biti smještene na prve 2 i na zadnje 3 vješalice?
NAPOMENA: Na svaku vješalicu treba objesiti samo jedan odjevni predmet.

Rješenje: a) S obzirom da nema uvjeta na razmještaj, svih 9 komada odjeće ispermutiramo na 9! načina.
b) Haljinice i košuljice promatramo kao dva bloka. Unutar bloka, haljinice možemo razmjestiti na 5!, a košuljice na 4! načina. Dodatno, blokovi mogu biti složeni kao (haljinice, košuljice) ili (košuljice, haljinice). Rj: $2 * 4! * 5!$.
c) Haljinice promatramo kao blok koji može početi s i-tom vješalicom u nizu, $i = 1, \ldots, 5$. Unutar bloka, haljinice se mogu razmjestiti na 5! načina, dok košuljice na preostale vješalice razmjestiti na 4! načina. Rj: $5 * 5! * 4!$.
d) Najprije odaberemo koje od 5 haljinica stavljamo na prva dva mjesta na $\binom{5}{2}$ načina. Svaki od blokova haljinica možemo permutirati redom na 2!, odnosno 3! načina. Košuljice možemo permutirati na 4! načina. Rj: $\binom{5}{2} * 2! * 3! * 4!$.

Zadatak 3. (20 bodova)
Na koliko načina četiri obitelji, od kojih svaku čine muškarac, žena i dvoje djece, može sjesti za okrugli stol s neoznačenim sjedištima ako:
a) svaka obitelj želi sjediti zajedno;
b) muškarci iz nekog razloga zahtijevaju da budu raspoređeni na nekim od 7 unaprijed odabranih mjesta koja se sva nalaze na istoj polovici stola;
c) muškarci žele sjediti zajedno i pričati o nogometu, dok svaka žena želi sjediti između svoje dvoje djece?

Rješenje: a) Svaku obitelj promatramo kao blok, te 4 bloka ciklički permutiramo na 3! načina. Unutar svakog bloka, članove pojedine obitelji permutiramo na 4! načina. Rj: $3! * (4!)^4$.
b) S obzirom da je 7 mjesta na kojima sjede muškarci na jednoj polovici stola unaprijed odabrani, više se ne radi o cikličkoj permutaciji, Najprije izaberemo na koja će 4, od označenih 7 mjesta sjesti muškarci na $\binom{7}{4}$ načina, te ih još permutiramo na 4! načina. Na preostala mjesta smjestimo na $(16-4)!$ načina žene i djecu. Rj: $\binom{7}{4} * 4! * 12!$.
c) Muškarce promatramo kao blok od 4 elementa, te svaku ženu sa svoje dvoje djece promatramo kao blok

od 3 elementa. Tih 5 blokova ciklički permutiramo na 4! načina. Muškarce unutar bloka razmjestimo na 4! načina, a svaki od blokova žena i djece na 2 načina $(D_1, \check{Z}, D_2)$ ili $(D_2, \check{Z}, D_1)$. Rj: $4! * 4! * 2^4$.

Zadatak 4. (20 bodova)
Koliko je peteroznamenkastih brojeva čija je suma znamenaka jednaka 8?

Rješenje: Svaki peteroznamenkasti broj se sastoji od 5 znamenki x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, takvih da prva znamenka nije 0. Preciznije $1 \leq x_1 \leq 9$, $0 \leq x_2, \ldots, x_5 \leq 8$. Suma znamenki peteroznamenkastog broja će

$$\begin{aligned} &x_1 + \cdots + x_5 = 8 \\ &x_1 \geq 1, \\ &x_2, \ldots, x_5 \geq 0, \\ &x_1, \ldots, x_5 \leq 9. \end{aligned}$$

ima cjelobrojnih rješenja. Zbog, $x_1 + \cdots + x_5 = 10$, posljednji uvjet možemo izostaviti, pa će takvih će brojeva biti onoliko koliko jednadžba 0

$$\begin{aligned} &x_1 + \cdots + x_5 = 8, \\ &x_1 \geq 1, \\ &x_2, \ldots, x_5 \geq 0, \end{aligned}$$

odnosno jednadžba

$$\begin{aligned} &y_1 + \cdots + y_5 = 7, \\ &y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5 \end{aligned}$$

ima cjelobrojnih rješenja, a takvih je $\binom{11}{4}$.

Zadatak 5. (20 bodova)
Za koje $n \in \mathbb{N}$ je suma

$$\sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} (-1)^{k+1} \binom{n}{2k-1} = 0?$$

Rješenje: $\sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} (-1)^{k+1} \binom{n}{2k-1} = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots + (-1)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1} \binom{n}{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$, pri čemu je izraz $2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ jednak $n-1$ ako je n paran, odnosno n ako je n neparan. Dodatno, $(i+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k$, pa je $\mathrm{Im}((i+1)^n) = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots + (-1)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1} \binom{n}{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$, jer je $i^{2k} \in \mathbb{R}$. Tražimo one n za koje je $\mathrm{Im}((i+1)^n) = 0$, a to su brojevi oblika $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$.

Zadatak 6. DODATNI ZADATAK (20 bodova)
Neka je n prirodan broj, $n \geq 2$. Koliko je različitih sumanada u razvoju od $(x_1 + \cdots + x_k)^n$ u kojima se svaki x_i, $i = 1, \ldots, n$ pojavljuje s potencijom većom ili jednakom 2?