Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
3. srpanj 2018.

Pismeni ispit
Linearna algebra 1

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) Iskažite Cauchy – Schwarz – Buniakowsky teorem.

(b) Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Koristeći jednakost $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti pokažite da vrijedi:

$$\frac{x}{y^2z^2} + \frac{y}{z^2x^2} + \frac{z}{x^2y^2} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) Napišite definiciju linearne nezavisnosti skupa vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$.

(b) Čine li vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{c} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ bazu u $X_0(E)$? Ukoliko čine, Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije sagradite ortonormiranu bazu $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ i vektor $\vec{d} = 6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}$ prikažite u toj ortonormiranoj bazi.

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) Kako se definira mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$?

(b) Odredite vektor $\vec{a}$ koji je kolinearan s vektorom $\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ i zadovoljava uvjet $\vec{a} \cdot \vec{b} = -18$. Nakon toga, za $\vec{c} = \vec{i} - \vec{k}$ ispitajte jesu li vektori

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{i} - \tfrac{1}{9}(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{j} + (\vec{c} \cdot \vec{c})\vec{k}, \\
\vec{y} &= (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{i} + \tfrac{1}{36}(\vec{b} \cdot \vec{b})\vec{j} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{k}, \\
\vec{z} &= \tfrac{1}{9}(\vec{b} \cdot \vec{b})\vec{i} - (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{j} + (\vec{c} \cdot \vec{c})\vec{k},
\end{aligned}$$

komplanarni te odredite l_1 normu zbroja tih vektora.

Zadatak 4. [20 bodova]

Provjerite je li LU dekompozicija matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

provediva. Ukoliko je, pronađite matrice L i U i njihove inverzne matrice.

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) Kako izgleda parametarski, a kako kanonski oblik jednadžbe pravca p u prostoru koji je zadan točkom $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in E$ i vektorom $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \in X_0(E)$.

(b) Odredite točku B koja je simetrična točki $A = (3, 0, -4)$ s obzirom na pravac

$$p \ldots \frac{x-2}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{1}.$$