I007 Osnove umjetne inteligencije

Tema: Vjerojatnosno zaključivanje.

12. 5. 2021.

predavač: Darija Marković

asistent: Darija Marković

Vjerojatnosno zaključivanje koristi se kod

- postavljanje dijagnoza
- prepoznavanja govora
- praćenja objekata
- robotskog mapiranja / kartografiranja
- genetike
- korigiranja grešaka u kodu
- ...

Neizvjesnost/ Nesigurnost / Nepouzdanost

- Općenito:
  - Opažene varijable (dokazi): agent zna nešto o stanju svijeta (npr. očitanja senzora ili simptomi)
  - Neopažene varijable: agent treba zaključiti nešto o drugim aspektima (npr. gdje se nalazi objekt ili o kojoj se bolesti radi)
  - Model: Agent zna nešto o odnosu poznatih i nepoznatih varijabli
- Vjerojatnosno zaključivanje daje način upravljanja našim uvjerenjima i znanjem

Vjerojatnost

- slučajna varijabla: značajka (obilježje) svijeta u vezi koje (možda) postoji nesigurnost - unaprijed ne znamo ishod, ali imamo zadanu distribuciju koja govori s kojom vjerojatnosti će se određeni ishod dogoditi
  - X: pada li kiša?
  - Y: je li toplo ili hladno?
  - Z: koliko će dugo trajati vožnja do posla?
- slučajne varijable označavamo s velikim slovima : $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$
  - ishode označavamo s malim slovima: $a, b, x_1, x_2, \ldots$
- poput varijabli u PZO, slučajne varijable imaju domene
  - za X $\{$istina, laž$\}$ (koristit ćemo oznaku $\{+x, -x\}$)
  - za Y $\{$toplo, hladno$\}$
  - za Z $[0, \infty\rangle$

- neopažene slučajne varijable imaju zadanu distribuciju, npr.

$P(X)$

X	P
toplo	0.5
hladno	0.5

$P(Y)$

Y	P
sunce	0.6
kiša	0.1
magla	0.3

- Skraćeni zapis:

$$P(\text{toplo}) = P(X = \text{toplo})$$
$$P(\text{hladno}) = P(X = \text{hladno})$$
$$P(\text{kiša}) = P(Y = \text{kiša})$$

- uz pretpostavku jedinstvenosti elementa domene ovo je u redu

Zajednička (združena) distribucija

- Zajednička distribucija nad skupom slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ za svaku dodjelu (ishod) određuje broj:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  - i ovdje mora vrijediti: $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$

$$\sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

- Veličina tablice ukoliko imamo n varijabli s domenama veličine d?
  - nepraktično osim za male n

Zajednička (združena) distribucija

- Zajednička distribucija nad skupom slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ za svaku dodjelu (ishod) određuje broj:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  - i ovdje mora vrijediti: $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$

$$\sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

- Veličina tablice ukoliko imamo n varijabli s domenama veličine d?
  - nepraktično osim za male n

Vjerojatnosni modeli

- Vjerojatnosni model je zajednička distribucija za skup slučajnih varijabli
- Vjerojatnosni modeli:
  - (Slučajne) varijable s domenama
  - Dodjele se nazivaju ishodi
  - Zajedničke distribucije: govore jesu li dodjele (ishodi) vjerojatni
  - Normalizirano: vjerojatnosti u sumi daju 1
  - Idealno: samo određene varijable su u izravnoj interakciji
- Problem zadovoljavanja ograničenja:
  - Varijable s domenama
  - Ograničenja: definiraju / određuju je li dodjela moguća
  - Idealno: samo određene varijable su u izravnoj interakciji

Događaji

- događaj je skup E ishoda

$$P(E) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in E} P(x_1,\ldots,x_n)$$

- iz tablice zajedničke distribucije moguće je izračunati vjerojatnost bilo kojeg događaja
  - vjerojatnost da je toplo i sunčano
  - vjerojatnost da je toplo
  - vjerojatnost da je toplo ili sunčano

$P(T, V)$

T	V	P
toplo	sunce	0.4
toplo	kiša	0.1
hladno	sunce	0.2
hladno	kiša	0.3

- događaji koji nas obično zanimaju su parcijalne dodjele, npr. $P(T = \text{toplo})$

Marginalne distribucije

- marginalne distribucije dobivamo iz zajedničke distribucije eliminacijom nekih varijabli
- marginalizacija (sumiranje/zbrajanje): kombiniranje redaka zbrajanjem (uz zanemarivanje nekih od stupaca)

$P(T,V)$

T	V	P
toplo	sunce	0.4
toplo	kiša	0.1
hladno	sunce	0.2
hladno	kiša	0.3

$$P(t) = \sum_s P(t,s) \Longrightarrow$$

$P(T)$

T	P
toplo	0.5
hladno	0.5

$$P(s) = \sum_t P(t,s) \Longrightarrow$$

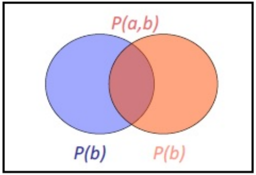
$P(V)$

V	P
sunce	0.6
kiša	0.4

Uvjetna vjerojatnost

- uvjetna vjerojatnost definira se kao

$$P(a|b) = \frac{P(a,b)}{P(b)}$$



- na primjer, ako je zadana zajednička distribucija $P(T, V)$ imamo:

$$P(\text{sunce}|\text{hladno}) = \frac{P(\text{hladno}, \text{sunce})}{P(\text{hladno})} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$

- uvjetne distribucije su vjerojatnostne distribucije nekih varijabli uz fiksirane vrijednosti drugih varijabli

Normalizacija

- kada iz zajedničke distribucije trebamo odrediti uvjetne distribucije, iz tablice izdvojimo dio koji odgovara dokazu (fiksiranim vrijednostima) i taj dio normaliziramo
- na primjer ako želimo odrediti $P(V|\text{hladno})$

T	V	$P(\text{hladno}, V)$
hladno	sunce	0.2
hladno	kiša	0.3

$\Longrightarrow$

V	$P(V\|\text{hladno})$
sunce	0.4
kiša	0.6

Vjerojatnosno zaključivanje

- vjerojatnosno zaključivanje: odrediti (izračunati) željenu vjerojatnost iz drugih poznatih vjerojatnosti (npr. uvjetnu iz zajedničke)
- u pravilu računamo uvjetne distribucije
  - $P(\text{na vrijeme}|\text{nema nesreće}) = 0.90$
  - ovo predstavlja agentovo vjerovanje uz dani dokaz
- vjerojatnost se mijenja s novim dokazima:
  - $P(\text{na vrijeme}|\text{nema nesreće, 5:00}) = 0.95$
  - $P(\text{na vrijeme}|\text{nema nesreće, 5:00, kiša}) = 0.80$
  - sa svakim novim dokazom treba ažurirati vjerojatnosti

Zaključivanje enumeracijom / pobrojavanjem

- opći slučaj: od varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neke su
  - dokazi (poznate vrijednosti varijabli): $E_1 \ldots E_k = e_1 \ldots e_k$
  - upiti (nepoznate vrijednosti varijabli): Q
  - skrivene varijable: $H_1 \ldots H_r$
- želimo izračunati $P(Q|e_1 \ldots e_k)$
  1. korak: iz tablice uzmemo retke konzistentne s dokazom
  2. korak: zbrojimo po skrivenim varijablama
  3. korak: normaliziramo
- očigledni problemi:
  - u najgorem slučaju vremenska složenost je $\mathcal{O}(d^n)$
  - prostorna složenost za pohranjivanje zajedničke distribucije $\mathcal{O}(d^n)$

Zaključivanje enumeracijom / pobrojavanjem

- opći slučaj: od varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neke su
  - dokazi (poznate vrijednosti varijabli): $E_1 \ldots E_k = e_1 \ldots e_k$
  - upiti (nepoznate vrijednosti varijabli): Q
  - skrivene varijable: $H_1 \ldots H_r$
- želimo izračunati $P(Q|e_1 \ldots e_k)$
  1. korak: iz tablice uzmemo retke konzistentne s dokazom
  2. korak: zbrojimo po skrivenim varijablama
  3. korak: normaliziramo
- očigledni problemi:
  - u najgorem slučaju vremenska složenost je $\mathcal{O}(d^n)$
  - prostorna složenost za pohranjivanje zajedničke distribucije $\mathcal{O}(d^n)$

Primjer

D	T	V	P
ljeto	toplo	sunce	0.3
ljeto	toplo	kiša	0.05
ljeto	hladno	sunce	0.1
ljeto	hladno	kiša	0.05
zima	toplo	sunce	0.1
zima	toplo	kiša	0.05
zima	hladno	sunce	0.15
zima	hladno	kiša	0.2

$$P(\text{sunce}) = ?$$
$$P(\text{sunce}|\text{zima}) = ?$$
$$P(\text{sunce}|\text{zima}, \text{toplo}) = ?$$

Pravilo produkta. Lančano pravilo.

- ponekad imamo uvjetne distribucije, a želimo zajedničku

$$P(b)P(a|b) = P(a, b)$$

- ovo se naziva pravilo produkta
- općenito, zajedničku distribuciju možemo zapisati kao produkt uvjetnih distribucija

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2)$$

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_i P(x_i|x_1, \ldots, x_{i-1})$$

- ovo se naziva lančano pravilo

Pravilo produkta. Lančano pravilo.

- ponekad imamo uvjetne distribucije, a želimo zajedničku

$$P(b)P(a|b) = P(a, b)$$

- ovo se naziva pravilo produkta
- općenito, zajedničku distribuciju možemo zapisati kao produkt uvjetnih distribucija

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2)$$

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_i P(x_i|x_1, \ldots, x_{i-1})$$

- ovo se naziva lančano pravilo

- zajedničku distribuciju dviju varijabli moguće je faktorizirati na dva načina:

$$P(x, y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x)$$

- dijeljenjem dobivamo:

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)}{P(y)}P(x)$$

- zašto je ovo korisno?
  - omogućava nam dobivanje jedne uvjetne vjerojatnosti iz one druge
  - obično je određivanje jedne uvjetne vjerojatnosti teško, a određivanje druge jednostavno
  - osnova mnogih sustava (automatsko prepoznavanje govora, strojno prevođenje)
- jedna od najbitnijih formula za umjetnu inteligenciju

- zajedničku distribuciju dviju varijabli moguće je faktorizirati na dva načina:

$$P(x,y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x)$$

- dijeljenjem dobivamo:

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)}{P(y)}P(x)$$

- zašto je ovo korisno?
  - omogućava nam dobivanje jedne uvjetne vjerojatnosti iz one druge
  - obično je određivanje jedne uvjetne vjerojatnosti teško, a određivanje druge jednostavno
  - osnova mnogih sustava (automatsko prepoznavanje govora, strojno prevođenje)
- jedna od najbitnijih formula za umjetnu inteligenciju

Zaključivanje s Bayesovim pravilom

- određivanje vjerojatnosti dijagnoze pomoću vjerojatnosti simptoma

$$P(\text{uzrok} \mid \text{posljedica}) = \frac{P(\text{posljedica} \mid \text{uzrok})P(\text{uzrok})}{P(\text{posljedica})}$$

- primjer:
  - M - meningitis, U - ukočen vrat
    $P(+u \mid +m) = 0.8$
    $P(+m) = 0.0001$
    $P(+u) = 0.1$

$$P(+m \mid +u) = \frac{P(+u \mid +m)P(+m)}{P(+u)} = \frac{0.8 \times 0.0001}{0.1} = 0.0008$$

  - primjetimo da je posteriori vjerojatnost zaraze meningitisom i dalje vrlo mala

Zaključivanje s Bayesovim pravilom

- određivanje vjerojatnosti dijagnoze pomoću vjerojatnosti simptoma

$$P(\text{uzrok} \mid \text{posljedica}) = \frac{P(\text{posljedica} \mid \text{uzrok})P(\text{uzrok})}{P(\text{posljedica})}$$

- primjer:
    - M - meningitis, U- ukočen vrat
      $P(+u \mid +m) = 0.8$
      $P(+m) = 0.0001$
      $P(+u) = 0.1$

$$P(+m \mid +u) = \frac{P(+u \mid +m)P(+m)}{P(+u)} = \frac{0.8 \times 0.0001}{0.1} = 0.0008$$

    - primjetimo da je posteriori vjerojatnost zaraze meningitisom i dalje vrlo mala

Primjer

- dano je

$P(X)$

X	P
sunce	0.8
kiša	0.2

$P(Y|X)$

Y	X	P
mokro	sunce	0.1
suho	sunce	0.9
mokro	kiša	0.7
suho	kiša	0.3

- odredite $P(X|\text{suho})$

Vjerojatnosni modeli

- modeli opisuju način na koji svijet funkcionira
- modeli su uvijek pojednostavljenja
  - možda ne vode računa o svim varijablama
  - možda ne vode računa o međusobnim odnosima među varijablama
  - “Svi modeli su pogrešni, no neki su korisni. ” George E. P. Box
- što radimo s vjerojatnosnim modelima?
  - uz dane dokaze trebamo nešto zaključiti o nepoznatim varijablama
  - obrazloženje
  - prognoza
  - vrijednost informacija

Nezavisnost

- dvije varijable su nezavisne ako za zajedničku vjerojatnost vrijedi

$$P(X, Y) = P(X)P(Y),$$

odnosno

$$\forall x, y \quad P(x, y) = P(x)P(y)$$

- pišemo $X \perp\!\!\!\perp Y$
- drugim riječima zajedničku vjerojatnost računamo jednostavnim množenjem marginalnih
- varijable uglavnom nisu nezavisne
- moguće je koristiti nezavisnost kao pretpostavku modela
  - nezavisnost može biti pojednostavljivanje pretpostavki
  - empirijske zajedničke distribucije su u najboljem slučaju bliske onima koje bi imali u slučaju nezavisnosti

Nezavisnost

- dvije varijable su nezavisne ako za zajedničku vjerojatnost vrijedi

$$P(X,Y) = P(X)P(Y),$$

odnosno

$$\forall x, y \quad P(x,y) = P(x)P(y)$$

- pišemo $X \perp\!\!\!\perp Y$
- drugim riječima zajedničku vjerojatnost računamo jednostavnim množenjem marginalnih
- varijable uglavnom nisu nezavisne
- moguće je koristiti nezavisnost kao pretpostavku modela
  - nezavisnost može biti pojednostavljivanje pretpostavki
  - empirijske zajedničke distribucije su u najboljem slučaju bliske onima koje bi imali u slučaju nezavisnosti

Kako provjeriti nezavisnost?

$P_1(T, V)$

T	V	P
toplo	sunce	0.4
toplo	kiša	0.1
hladno	sunce	0.2
hladno	kiša	0.3

$P(T)$

T	P
toplo	0.5
hladno	0.5

$P(V)$

V	P
sunce	0.6
kiša	0.4

Kako provjeriti nezavisnost?

$P_1(T, V)$

T	V	P
toplo	sunce	0.4
toplo	kiša	0.1
hladno	sunce	0.2
hladno	kiša	0.3

$P(T)$

T	P
toplo	0.5
hladno	0.5

$P(V)$

V	P
sunce	0.6
kiša	0.4

$P_2(T, V)$

T	V	P
toplo	sunce	0.3
toplo	kiša	0.2
hladno	sunce	0.3
hladno	kiša	0.2

Uvjetna nezavisnost

- bezuvjetna (potpuna) nezavisne je vrlo rijetka
- uvjetna nezavisnost je najosnovniji i najrobusniji oblik znanja o neizvjesnim okruženjima
- X je uvjetno nezavisno od Y uz dani Z ako i samo ako

$$\forall x, y, z \;:\; P(x, y|z) = P(x|z)P(y|z)$$

ili ekvivalentno

$$\forall x, y, z \;:\; P(x|z, y) = P(x|z)$$

- pišemo $X \perp\!\!\!\perp Y|Z$

Uvjetna nezavisnost i lančano pravilo

- lančano pravilo:
  $P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1, X_2)\cdots$
- primjer:

$$P(\text{gužva}, \text{kiša}, \text{kišobran}) = P(\text{kiša})P(\text{gužva}|\text{kiša})P(\text{kišobran}|\text{kiša}, \text{gužva})$$

- uz pretpostavku uvjetne nezavisnosti:

$$P(\text{gužva}, \text{kiša}, \text{kišobran}) = P(\text{kiša})P(\text{gužva}|\text{kiša})P(\text{kišobran}|\text{kiša})$$

- Bayesove mreže / grafički modeli pomažu iskazati pretpostavku uvjetne nezavisnosti

Uvjetna nezavisnost i lančano pravilo

- lančano pravilo:
  $P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1, X_2)\cdots$
- primjer:

$$P(\text{gužva, kiša, kišobran}) = P(\text{kiša})P(\text{gužva}|\text{kiša})P(\text{kišobran}|\text{kiša, gužva})$$

- uz pretpostavku uvjetne nezavisnosti:

$$P(\text{gužva, kiša, kišobran}) = P(\text{kiša})P(\text{gužva}|\text{kiša})P(\text{kišobran}|\text{kiša})$$

- Bayesove mreže / grafički modeli pomažu iskazati pretpostavku uvjetne nezavisnosti

Uvjetna nezavisnost i lančano pravilo

- lančano pravilo:
  $P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1, X_2)\cdots$
- primjer:

$$P(\text{gužva}, \text{kiša}, \text{kišobran}) = P(\text{kiša})P(\text{gužva}|\text{kiša})P(\text{kišobran}|\text{kiša}, \text{gužva})$$

- uz pretpostavku uvjetne nezavisnosti:

$$P(\text{gužva}, \text{kiša}, \text{kišobran}) = P(\text{kiša})P(\text{gužva}|\text{kiša})P(\text{kišobran}|\text{kiša})$$

- Bayesove mreže / grafički modeli pomažu iskazati pretpostavku uvjetne nezavisnosti