

1007 Osnove umjetne inteligencije

Tema: Vjerojatnosno zaključivanje.

12. 5. 2021.



1 Bayesove mreže

2 D-separacija

3 Bayesove mreže: zaključivanje

4 Bayesove mreže: uzorkovanje





Bayesove mreže

- postoje dva problema s korištenjem cijele tablice zajedničkih distribucija kao vjerojatnostnih model:
 - osim kada postoji samo nekoliko varijabli, zajednička distribucija je prevelika da bi se eksplicitno zapisala
 - teško je bilo što empirijski naučiti (procijeniti) o više nego nekoliko varijabli u isto vrijeme
- Bayesova mreža: tehnika opisivanja kompleksnih zajedničkih distribucija (modela) korištenjem jednostavnih, lokalnih distribucija (uvjetnih distribucija)
 - prikladnije ih se naziva grafičkim modelima
 - opisujemo u kakvoj su vezi varijable lokalno
 - lanaci lokalnih veza zajedno daju globalnu (opću), indirektnu vezu





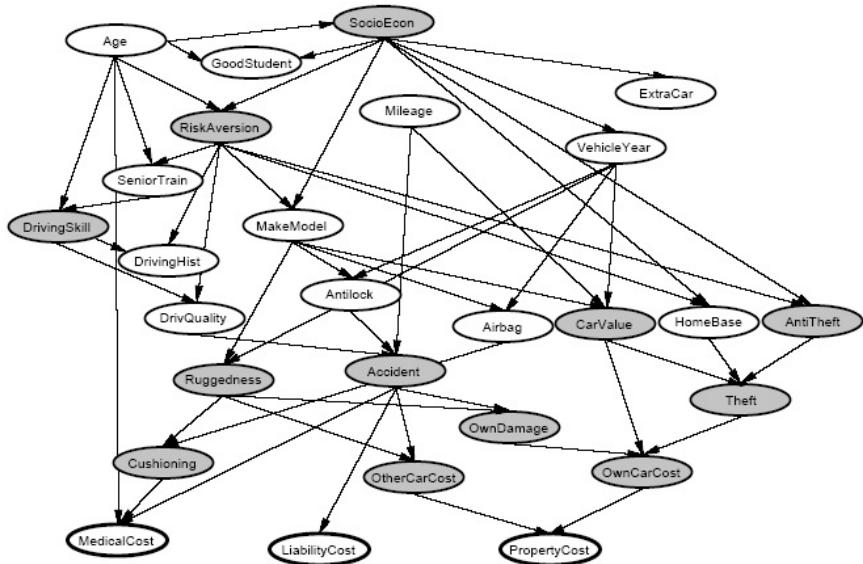
Bayesove mreže

- postoje dva problema s korištenjem cijele tablice zajedničkih distribucija kao vjerojatnostnih model:
 - osim kada postoji samo nekoliko varijabli, zajednička distribucija je prevelika da bi se eksplicitno zapisala
 - teško je bilo što empirijski naučiti (procijeniti) o više nego nekoliko varijabli u isto vrijeme
- Bayesova mreža: tehnika opisivanja kompleksnih zajedničkih distribucija (modela) korištenjem jednostavnih, lokalnih distribucija (uvjetnih distribucija)
 - prikladnije ih se naziva grafičkim modelima
 - opisujemo u kakvoj su vezi varijable lokalno
 - lanaci lokalnih veza zajedno daju globalnu (opću), indirektnu vezu





Bayesove mreže: primjer osiguranja automobila





Opis grafičkog modela

- čvorovi: varijable
 - mogu biti poznate (opažene) ili nepoznate (neopažene)
- grane: veze
 - slično kao kod problema zadovoljavanja ograničenja
 - označavaju direktnu vezu između varijabli
 - formalno: daju informaciju o uvjetnoj nezavisnosti





Opis grafičkog modela

- čvorovi: varijable
 - mogu biti poznate (opažene) ili nepoznate (neopažene)
- grane: veze
 - slično kao kod problema zadovoljavanja ograničenja
 - označavaju direktnu vezu između varijabli
 - formalno: daju informaciju o uvjetnoj nezavisnosti





Primjeri

- Prometna gužva: varijable
 - K pada kiša
 - G prometna gužva
- Protuprovalni alarm: varijable
 - PR provalnik
 - A alarm se oglasio
 - M Marija je nazvala
 - I Ivan je nazvao
 - PO dogodio se potres





Primjeri

- Prometna gužva: varijable
 - K pada kiša
 - G prometna gužva
- Protuprovalni alarm: varijable
 - PR provalnik
 - A alarm se oglasio
 - M Marija je nazvala
 - I Ivan je nazvao
 - PO dogodio se potres





Semantika Bayesovih mreža

- skup čvorova, po jedan za svaku varijablu
- usmjereni graf bez ciklusa
- uvjetne distribucije za svaki čvor
 - skup distribucija za X , po jedan za svaku kombinaciju vrijednosti roditeljskih čvorova

$$P(X|a_1, \dots, a_n)$$

- tablica uvjetnih vjerojatnosti (CPT)
- opisuje uzročni proces





Vjerojatnosti u Bayesovim mrežama

- Bayesove mreže implicitno šifriraju zajedničku distribuciju
 - kao produkt lokalnih uvjetnih distribucija
 - kako bi odredili vjerojatnost potpune dodjele u Bayesovoj mreži, treba pomnožiti sve relevantne uvjetne vjerojatnosti:

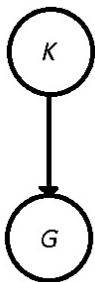
$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i | \text{roditelj}(x_i))$$

- gornji izraz slijedi iz lančanog pravila i uvjetnih nezavisnosti





Primjer: Prometna gužva



$$P(K)$$

$+k$	$1/4$
$-k$	$3/4$

$$P(G|K)$$

$+k$	$+g$	$3/4$
$+k$	$-g$	$1/4$
$-k$	$+g$	$1/2$
$-k$	$-g$	$1/2$

$$P(+k, -g) = ?$$

$$P(G, K) = ?$$

$$P(K|G) = ?$$

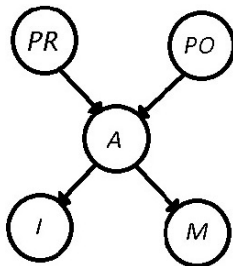




Primjer: Protuprovalni alarm

$$P(PR)$$

$+pr$	0.001
$-pr$	0.999



$$P(PO)$$

$+po$	0.002
$-po$	0.998

$$P(A|PR, PO)$$

$+pr$	$+po$	$+a$	0.95
$+pr$	$+po$	$-a$	0.05
$+pr$	$-po$	$+a$	0.94
$+pr$	$-po$	$-a$	0.06
$-pr$	$+po$	$+a$	0.29
$-pr$	$+po$	$-a$	0.71
$-pr$	$-po$	$+a$	0.001
$-pr$	$-po$	$-a$	0.999

$$P(I|A)$$

$+a$	$+i$	0.9
$+a$	$-i$	0.1
$-a$	$+i$	0.05
$-a$	$-i$	0.95

$$P(M|A)$$

$+a$	$+m$	0.7
$+a$	$-m$	0.3
$-a$	$+m$	0.01
$-a$	$-m$	0.99



Uzročnosti?

- kada Bayesove mreže odražavaju pravi uzročni model
 - uglavnom su jednostavnije (čvorovi imaju manji broj roditelja)
 - lakše je razmišljati na taj način (kiša uzrokuje povećanje prometne gužve, a ne obrnuto)
 - uzročnost koju sugeriraju stručnjaci
- Bayesove mreže ne moraju biti uzročne
 - ponekad ne postoji mreža uzroka na domeni (posebno ako neke varijable nedostaju)
 - strelice ponekad opisuju korelaciju, a ne uzročnost
- što strelice predstavljaju?
 - topologija može otkrivati uzročnu strukturu, ali zapravo topologija šifrira uvjetnu nezavisnost





- 1 Bayesove mreže
- 2 D-separacija**
- 3 Bayesove mreže: zaključivanje
- 4 Bayesove mreže: uzorkovanje





Bayesove mreže: pretpostavke

- kako bi definirali Bayesovu mrežu kada imamo zadani graf potrebno je pretpostaviti

$$P(x_i | x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) = P(x_i | \text{roditelj}(x_i))$$

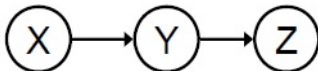
- pored gornje pretpostavke imamo i pretpostavku uvjetnih nezavisnosti
 - obično postoje dodatne uvjetne nezavisnosti
 - njih je moguće pročitati iz grafa
- važno za modeliranje: razumjeti koje pretpostavke radimo prilikom odabira grafa Bayesove mreže





Nezavisnost u Bayesovim mrežama

- važna pitanja u BM:
 - jesu li dva čvora nezavisna uz dani određeni dokaz?
 - ako jesu, to je potrebno dokazati
 - ako nisu, potrebno je dati protuprimjer
 - primjer: jesu li X i Z nužno nezavisni?





- proučava se svojstvo nezavisnosti za trojke
- kompleksni slučaj se analizira u terminima trojki
- D-separacija: uvjet/algorithm za davanje odgovora na takve upite





Uzročni lanac



X : Nizak tlak Y : Kiša Z : Gužva u prometu

$$P(x, y, z) = P(x)P(y|x)P(z|y)$$

- jesu li X i Z nezavisni?
- jesu li X i Z nezavisni uz dani Y ?





Uzročni lanac



X : Nizak tlak Y : Kiša Z : Gužva u prometu

$$P(x, y, z) = P(x)P(y|x)P(z|y)$$

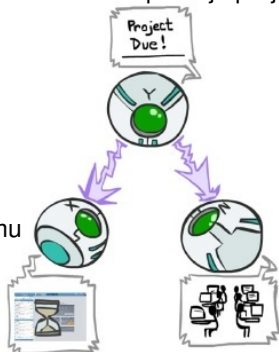
- jesu li X i Z nezavisni?
- jesu li X i Z nezavisni uz dani Y ?





Zajednički uzrok

Y : Rok za predaju projekta



X : Rasprava na forumu

Z : Zauzeti praktikum

$$P(x, y, z) = P(y)P(x|y)P(z|y)$$

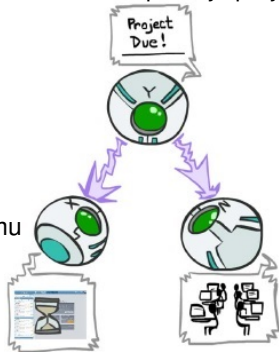
- jesu li X i Z nezavisni?
- jesu li X i Z nezavisni uz dani Y ?





Zajednički uzrok

Y : Rok za predaju projekta



X : Rasprava na forumu

Z : Zauzeti praktikum

$$P(x, y, z) = P(y)P(x|y)P(z|y)$$

- jesu li X i Z nezavisni?
- jesu li X i Z nezavisni uz dani Y ?

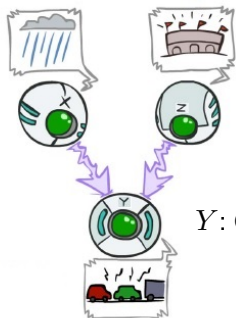




Zajednički ishod

X : Kiša

Z : Utakmica



Y : Gužva u prometu

- jesu li X i Z nezavisni?
- jesu li X i Z nezavisni uz dani Y ?

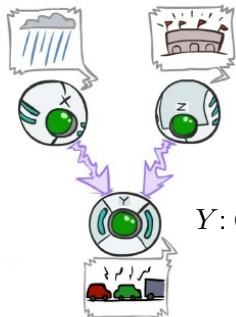




Zajednički ishod

X : Kiša

Z : Utakmica



Y : Gužva u prometu

- jesu li X i Z nezavisni?
- jesu li X i Z nezavisni uz dani Y ?





Opći slučaj

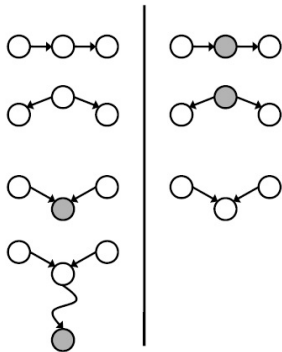
- opće pitanje: jesu li dvije varijable u danoj Bayesovoj mreži nezavisne (uz dani dokaz)
- rješenje: analizirati graf
- svaki kompleksni slučaj može se podijeliti na ponavljanje ova tri osnovna slučaja





Dohvatljivost. Aktivni/neaktivni putovi

- zasjeniti sve dokaze u grafu, te gledati putove u rezultirajućem grafu
- pitanje: jesu li X i Z uvjetno nezavisni uz dani dokaz Y ?
 - ako jesu, kažemo da su X i Z d-separirani s Y
 - pogledaju se svi (neusmjereni) putovi od X do Z
 - ako ne postoji aktivni put imamo nezavisnost
- put je aktivan ako je svaka trojka aktivna
 - uzročni lanac $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ gdje je Y neopažen
 - zajednički uzrok $X \leftarrow Y \rightarrow Z$ gdje je Y neopažen
 - zajednički ishod $X \rightarrow Y \leftarrow Z$ gdje je Y (ili neki od njegovih sljedbenika) opažen
- za blokiranje puta dovoljan je jedan neaktivni segment





D-separacija

- upit: $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \mid \{X_{k_1}, \dots, X_{k_n}\}$?
- provjeravaju se svi neusmjereni putovi između X_i i X_j
 - ako je barem jedan aktivan, nemamo garanciju nezavisnosti
 - u suprotnom (tj. kada su svi putovi neaktivni), vrijedi

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \mid \{X_{k_1}, \dots, X_{k_n}\}$$



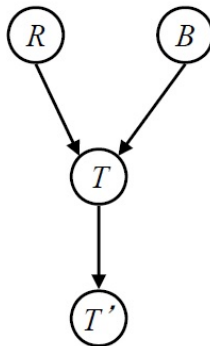


Primjer 1.

$$R \perp\!\!\!\perp B$$

$$R \perp\!\!\!\perp B | T$$

$$R \perp\!\!\!\perp B | T'$$





Primjer 2.

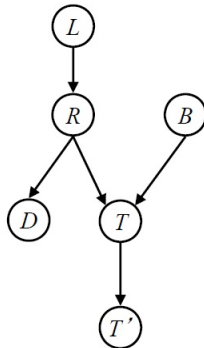
$$L \perp\!\!\!\perp T' | T$$

$$L \perp\!\!\!\perp B$$

$$L \perp\!\!\!\perp B | T$$

$$L \perp\!\!\!\perp B | T'$$

$$L \perp\!\!\!\perp B | T, R$$



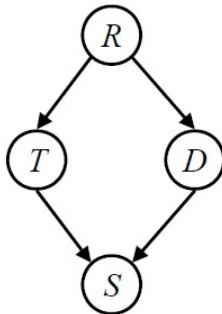


Primjer 3.

$$T \perp\!\!\!\perp D$$

$$T \perp\!\!\!\perp D | R$$

$$T \perp\!\!\!\perp D | R, S$$





Implikacije strukture

- za danu Bayesovu mrežu koristeći algoritam d-separacije moguće je odrediti potpunu listu uvjetnih nezavisnosti
- ova lista određuje skup distribucija koje je moguće predstaviti s tako izgrađenom mrežom





- 1 Bayesove mreže
- 2 D-separacija
- 3 Bayesove mreže: zaključivanje**
- 4 Bayesove mreže: uzorkovanje





- zaključivanje: izračunavanje nekih korisnih veličina iz zajedničkih distribucija
- primjeri:
 - posteriori vjerojatnost

$$P(Q|E_1 = e_1, \dots, E_k = e_k)$$

- najvjerojatnije obrazloženje/objašnjenje

$$\arg \max_q P(Q = q|E_1 = e_1, \dots, E_k = e_k)$$





- ukoliko na raspolaganju imamo neograničeno vrijeme, zaključivanje u Bayesovim mrežama je jednostavno
- recept:
 - odrediti sve marginalne vjerojatnosti
 - odrediti sve potrebne vjerojatnosti
 - izračunati ih i zbrojiti
- primjer $P(+b | +j, +m)$





- razlog zbog kojeg je enumeracija spora: spajaju se zajedničke vjerojatnosti prije nego se zbraja po skrivenim varijablama
- ideja: ispreplesti spajanje i marginaliziranje
 - postupak se zove eliminacija varijabli
 - i dalje je NP-teško, ali obično je puno brže od enumeracije





- zajednička vjerojatnost: $P(X, Y)$

- elementi $P(x, y)$ za sve x, y
- u zbroju daje 1

$$P(T, W)$$

T	W	P
toplo	sunce	0.4
toplo	kiša	0.1
hladno	sunce	0.2
hladno	kiša	0.3

- izdvojene / odabrane zajedničke vjerojatnosti: $P(x, Y)$

- dio zajedničke vjerojatnosti
- elementi $P(x, y)$ za fiksiran x i sve y
- u zbroju daje $P(x)$

$$P(\text{hladno}, W)$$

T	W	P
hladno	sunce	0.2
hladno	kiša	0.3

- broj velikih slova određuje veličinu tablice





- jednostruka uvjetovana: $P(Y|x)$
 - elementi $P(y|x)$ za fiksiran x i sve y
 - u zbroju daje 1

$$P(W|hladno)$$

T	W	P
hladno	sunce	0.4
hladno	kiša	0.6

- familija uvjetovanih: $P(Y|X)$
 - elementi $P(y|x)$ za sve x i y
 - u zbroju daje $|X|$

$$P(W|T)$$

T	W	P
toplo	sunce	0.8
toplo	kiša	0.2
hladno	sunce	0.4
hladno	kiša	0.6





$P(\text{kiša}|T)$

T	W	P
toplo	kiša	0.2
hladno	kiša	0.6

- izdvojena / određena familija: $P(y|X)$
 - elementi $P(y|x)$ za fiksirani y i za sve x
 - u zbroju daje ???
- općenito imamo $P(Y_1 \dots Y_N | X_1 \dots X_M)$ - višedimenzionalna tablica
- elementi su $P(y_1 \dots y_N | x_1 \dots x_M)$
- za svaki fiksirani X ili Y veličina tablice se smanjuje

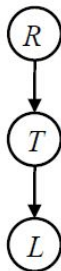




Primjer

Slučajne varijable

- R : kiša
- T : promet / gužva u prometu
- L : kašnjenje na predavanja



$$P(R)$$

+r	0.1
-r	0.9

$$P(T|R)$$

+r	+t	0.8
+r	-t	0.2
-r	+t	0.1
-r	-t	0.9

$$P(L|T)$$

+t	+l	0.3
+t	-l	0.7
-t	+l	0.1
-t	-l	0.9





- pratimo objekte koje nazivamo faktori
- inicijalni faktori su tablice uvjetovane vjerojatnosti (CPT) po jedna za svaku varijablu
- odaberemo sve poznate vrijednosti
- naizmjenično spajamo faktore i eliminiramo varijable





1. operacija: spajanja faktora

- prva osnovna operacija
- kombiniramo faktore
 - uzmemo sve faktore nad varijablama koje spajamo
 - izgradimo novi faktor za uniju uključenih varijabli
 - npr. spajamo nad R : $P(R) \times P(T|R) \Rightarrow P(R, T)$
 - računamo umnožak po točkama: $\forall r, t : P(r, t) = P(r) \cdot P(t|r)$





2. operacija: eliminacija

- druga osnovna operacija: marginalizacija
- uzmemo faktor i odsumiramo varijablu
 - novi faktor je manji
 - npr. eliminacija R : $P(R, T) \Rightarrow P(T)$





Rana marginalizacija

$$P(R) \Rightarrow P(R, T) \Rightarrow P(T) \Rightarrow P(T, L) \Rightarrow P(L)$$





Dokazi

- ako postoje dokazi počinje se s faktorima koji sadrže dokaz
- za rezultat se dobije odabrana zajednička vjerojatnost upita i dokaza
- za dobivanje odgovora, samo je potrebno normalizirati





U općem slučaju

- upit: $P(Q|E_1 = e_1, \dots, E_k = e_k)$
- započinje se s inicijalnim faktorima
- dok postoji skrivenih varijabli: odaberi skrivenu varijablu H , spoji sve faktore koji spominju H i eliminiraj H
- spoji sve preostale faktore i normaliziraj





- 1 Bayesove mreže
- 2 D-separacija
- 3 Bayesove mreže: zaključivanje
- 4 Bayesove mreže: uzorkovanje**





Uzorkovanje: približno zaključivanje

- apriorno uzorkovanje / uzorkovanje unaprijed
- uzorkovanje s odbacivanjem / uzorkovanje uz prisustvo dokaza
- ponderiranje s vjerodostojnosti / uzorkovanje po važnosti
- Gibbsovo uzorkovanje

