



I007 Osnove umjetne inteligencije

Tema: Vjerojatnosno zaključivanje - vježbe

19. 5. 2021.



Bayesovo pravilo

- zajedničku distribuciju dviju varijabli moguće je faktorizirati na dva načina:

$$P(x, y) = P(x|y)P(y) \text{ ili } P(x, y) = P(y|x)P(x)$$

- jer se uvjetna vjerojatnost definira kao:

$$P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$$





Lančano pravilo

- zajedničku distribuciju možemo zapisati kao produkt uvjetnih distribucija:

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2)$$

- ili općenitije:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_i P(x_i|x_1, \dots, x_{i-1})$$





Vjerojatnosti u Bayesovim mrežama

- Bayesove mreže implicitno šifriraju zajedničku distribuciju
 - kao produkt lokalnih uvjetnih distribucija
 - kako bi odredili vjerojatnost potpune dodjele u Bayesovoj mreži, treba pomnožiti sve relevantne uvjetne vjerojatnosti:

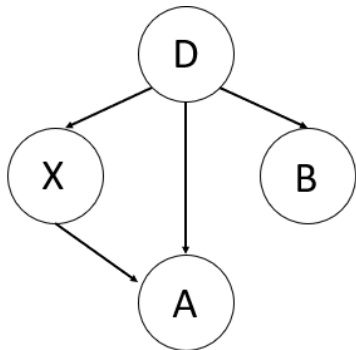
$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_i P(x_i | \text{roditelj}(x_i))$$





Zadatak 1.

Neka je zadana Bayesova mreža kao na slici te neka su zadane tablice vjerojatnosti. ($D = \text{zaraza}$, $\mathcal{R}(D) = \{+d, -d\}$; $A = \text{test na zarazu}$, $\mathcal{R}(A) = \{+a, -a\}$; $B = \text{2. test na zarazu}$, $\mathcal{R}(B) = \{+b, -b\}$; $X = \text{nepoznata varijabla}$)





$P(A D, X)$			
$+d$	$+x$	$+a$	0.9
$+d$	$+x$	$-a$	0.1
$+d$	$-x$	$+a$	0.8
$+d$	$-x$	$-a$	0.2
$-d$	$+x$	$+a$	0.6
$-d$	$+x$	$-a$	0.4
$-d$	$-x$	$+a$	0.1
$-d$	$-x$	$-a$	0.9

$P(D)$	
$+d$	0.1
$-d$	0.9

$P(B D)$		
$+d$	$+b$	0.7
$+d$	$-b$	0.3
$-d$	$+b$	0.5
$-d$	$-b$	0.5

$P(X D)$		
$+d$	$+x$	0.7
$+d$	$-x$	0.3
$-d$	$+x$	0.8
$-d$	$-x$	0.2





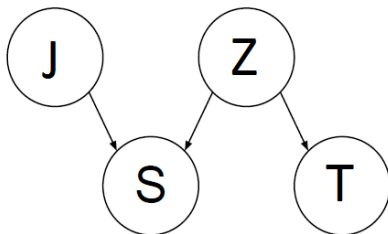
- (a) Odredite vjerojatnost da je zaraza prisutna i da je rezultat testa A pozitivan.
- (b) Odredite $P(D = -d, A = +a)$.
- (c) Odredite $P(D = +d|A = +a)$.
- (d) Odredite $P(D = +d|B = +b)$.





Zadatak 2.

Miris sumpora (S) može doći od kuhanih jaja (J) ili od apokaliptične erupcije na Zelenom polju (Z). Apokaliptične erupcije na Zelenom polju također uzrokuju da tramvaji polete (T). Bayesova mreža i odgovarajuće uvjetne vjerojatnosti dane su u sljedećim tablicama.





$P(J)$	
$+j$	0.3
$-j$	0.7

$P(Z)$	
$+z$	0.2
$-z$	0.8

$P(S J, Z)$			
$+j$	$+z$	$+s$	1.0
$+j$	$+z$	$-s$	0.0
$+j$	$-z$	$+s$	0.7
$+j$	$-z$	$-s$	0.3
$-j$	$+z$	$+s$	0.1
$-j$	$+z$	$-s$	0.9
$-j$	$-z$	$+s$	0.2
$-j$	$-z$	$-s$	0.8

$P(T Z)$		
$+z$	$+t$	0.8
$+z$	$-t$	0.2
$-z$	$+t$	0.1
$-z$	$-t$	0.9





Izračunajte sljedeće vrijednosti:

(a) $P(-j, -s, -z, -t)$

(b) $P(+t)$

(c) $P(+z | +t)$

(d) $P(+z | +s, +t, +j)$





Nezavisnost i uvjetna nezavisnost

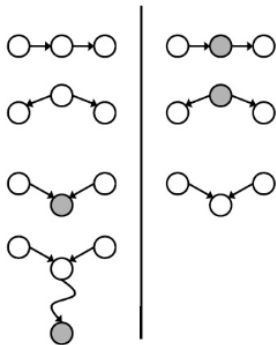
- dvije varijable su nezavisne ako za zajedničku vjerojatnost vrijedi $P(X, Y) = P(X)P(Y)$, tj. $\forall x, y P(x, y) = P(x)P(y)$
- pišemo: $X \perp Y$
- X je uvjetno nezavisna od Y uz dani Z ako i samo ako $\forall x, y, z : P(x, y|z) = P(x|z)P(y|z)$
- pišemo: $X \perp Y|Z$





D - separacija

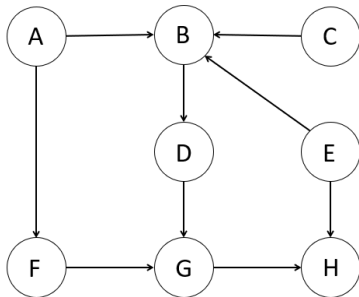
- zasjeniti sve dokaze u grafu, te gledati putove u rezultirajućem grafu
- pitanje: jesu li X i Z uvjetno nezavisni uz dani dokaz Y ?
 - ako jesu, kažemo da su X i Z d-separirani s Y
 - pogledaju se svi (neusmjereni) putovi od X do Z
 - ako ne postoji aktivni put imamo nezavisnost
- put je aktivan ako je svaka trojka aktivna
 - uzročni lanac $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ gdje je Y neopažen
 - zajednički uzrok $X \leftarrow Y \rightarrow Z$ gdje je Y neopažen
 - zajednički ishod $X \rightarrow Y \leftarrow Z$ gdje je Y (ili neki od njegovih sljedbenika) opažen
- za blokiranje puta dovoljan je jedan nekativni segment





Zadatak 3.

Pretpostavite da je zadana Bayesova mreža kao na slici. Ispitajte sljedeće (uvjetne) nezavisnosti:



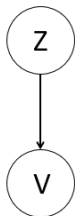
- (a) $A \perp\!\!\!\perp C$, (b) $A \perp\!\!\!\perp E|F$, (c) $F \perp\!\!\!\perp C|D$, (d) $C \perp\!\!\!\perp H|G$.





Zadatak 4.

Bliže se izbori i na njima može ili ne mora pobijediti stranka Zeleni (Z). Stručnjaci vjeruju da će vjerojatnost izgradnje vjetrenjača (V) biti veća ako Zeleni pobijede, ali bi se vjetrenjače mogle izgraditi pod bilo kojom administracijom. Situacija se može prikazati sljedećom Bayesovom mrežom i vjerojatnostima:

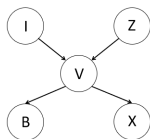


$P(Z)$	
$+z$	0.1
$-z$	0.9

$P(V Z)$		
$+v$	$+z$	0.667
$+v$	$-z$	0.25
$-v$	$+z$	0.333
$-v$	$-z$	0.75



- (a) Odredite $P(+v)$, tj. vjerojatnost da će se izgraditi vjetrenjače.
- (b) Odredite $P(+z | +v)$.
- (c) Odredite tablicu $P(V, Z)$.
- (d) Uz proširenje mreže:



gdje I predstavlja istraživanje, B budžet, a X skrivenu varijablu, ispitajte sljedeće (uvjetne) nezavisnosti:

- (i) $B \perp\!\!\!\perp Z$, (ii) $X \perp\!\!\!\perp Z | V$, (iii) $Z \perp\!\!\!\perp I$, (iv) $Z \perp\!\!\!\perp I | V$.





Zaključivanje u Bayesovim mrežama

1. OPERACIJA: spajanje faktora

- kombiniramo faktore: uzmemo sve faktore nad varijablama koje spajamo; izgradimo novi faktor za uniju uključenih varijabli
- npr. ako imamo varijable R i T i spajamo nad R :

$P(R) \times P(T|R) \rightarrow P(R, T)$, tj. računamo umnožak po točkama
 $\forall r, t : P(r, t) = P(r)P(t|r)$

2. OPERACIJA: eliminacija

- uzmemo faktor i odsumiramo mu varijablu; novi faktor je manji
- npr. eliminacija R : $P(R, T) \rightarrow P(T)$

- ako postoje dokazi, počinje se s faktorima koji sadrže dokaz





Zadatak 5.

Za danu Bayesovu mrežu zanima nas upit $P(Y, +z)$. Sve varijable imaju binarne domene. Pretpostavimo da radimo zaključivanje eliminacijom varijabli u sljedećem redoslijedu: X, T, U, V, W . Napišite sve faktore koji se generiraju u tom postupku i kako se na kraju dobije zaključak o $P(Y, +z)$.

