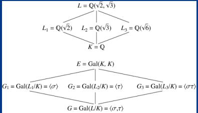

Algebra

Vježbe 1

8.3.2023.

predavač: prof.dr.sc. I.Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

GRUPE
Definicija i osnovni primjeri grupa

Definicija 1

*Neka je G neprazan skup. **Binarna operacija na** G funkcija je koja svakom uređenom paru elemenata od G pridružuje element od G, odnosno*

$$(a, b) \mapsto a * b \in G \;\; za \;\; sve \;\; a, b \in G.$$

*Kažemo da je skup G zatvoren s obzirom na binarnu operaciju $*$ i uređeni par $(G, *)$ nazivamo **grupoid**.*

Kada je jasno o kojoj je operaciji riječ, govorit ćemo samo grupoid G.

U nastavku, ukoliko nije posebno naznačeno o kojoj se binarnoj operaciji radi, binarnu operaciju nećemo označavati posebnim znakom, odnosno pisat ćemo $(a, b) \mapsto ab$.

Polugrupa je grupoid G u kome je binarna operacija asocijativna, to jest grupoid G u kome vrijedi $(ab)c = a(bc)$ za sve $a, b, c \in G$.

Lijeva jedinica ili **lijevi neutralni element** u grupoidu G svaki je element $l \in G$ takav da je $la = a$ za sve $a \in G$, a **desna jedinica** ili **desni neutralni element** u grupoidu G svaki je $d \in G$ takav da je $ad = a$ za sve $a \in G$.

Element grupoida G koji je i lijevi i desni neutralni element, odnosno $e \in G$ takav da je $ea = ae = a$ za sve $a \in G$, naziva se **jedinica**, **jedinični element** ili **neutralni element** grupoida G i označava se s e ili s 1.

Polugrupa s jedinicom naziva se **monoid**.

Neka je G monoid s jedinicom e i neka je $a \in G$. Kažemo da je $b_l \in G$ **lijevi inverz** ili **lijevi inverzni element od** a ako vrijedi $b_l a = e$, a da je $b_d \in G$ **desni inverz** ili **desni inverzni element od** a ako vrijedi $ab_d = e$.

Element monoida G koji je i lijevi i desni inverz od $a \in G$ naziva se **inverz** ili **inverzni element od** a i označava se s a^{-1}.

Kažemo da je $a \in G$ invertibilan element ako ima inverz.

Skup svih invertibilnih elemenata monoida G označavat ćemo s G^*.

Napomena 2

Neka je $(G, +)$ monoid u kojemu element $a \in G$ ima inverz. Tada neutralni element označavamo s 0 i nazivamo nula, a inverzni element označavamo s $-a$ i nazivamo suprotni element.

Definicija 3

*Kažemo da je grupoid G **grupa** ako vrijede sljedeća svojstva:*

1) *Asocijativnost. Binarna je operacija asocijativna, to jest vrijedi $(ab)c = a(bc)$ za sve a, b i c u G.*
2) *Postojanje neutralnog elementa. Postoji element e u G takav da je $ae = ea = a$ za sve a u G.*
3) *Postojanje inverznog elementa. Za svaki element a u G postoji element a^{-1} u G takav da je $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.*

Ako u grupi G vrijedi svojstvo komutativnosti, to jest ako je $ab = ba$ za sve elemente a, b u G, onda kažemo da je G **komutativna** ili **Abelova grupa**. (Analogno imamo komutativan grupoid, komutativnu polugrupu i komutativan monoid.)

Napomena 4

Neutralni je element u grupi G jedinstven.

Napomena 5

Za svaki element a u grupi G postoji jedinstveni inverzni element a^{-1} u grupi G.

Zadatak 1

Neka je G grupa. Dokažite sljedeće tvrdnje:

a) Za elemente a i b grupe G vrijedi $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

b) Neka su a, b i c elementi grupe G. Ako je $ac = bc$, onda je $a = b$.

c) Neka su a, b i c elementi grupe G. Ako je $ca = cb$, onda je $a = b$.

Zadatak 2

Dokažite da je grupa G Abelova grupa ako i samo ako vrijedi

$$a^2b^2 = (ab)^2 \text{ za sve } a, b \in G. \qquad \square$$

Zadatak 1

Neka je G grupa. Dokažite sljedeće tvrdnje:

a) Za elemente a i b grupe G vrijedi $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

b) Neka su a, b i c elementi grupe G. Ako je $ac = bc$, onda je $a = b$.

c) Neka su a, b i c elementi grupe G. Ako je $ca = cb$, onda je $a = b$.

Zadatak 2

Dokažite da je grupa G Abelova grupa ako i samo ako vrijedi

$$a^2b^2 = (ab)^2 \text{ za sve } a, b \in G. \qquad \square$$

Zadatak 3

Ispitajte svojstva sljedećih struktura:

a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ uz operaciju zbrajanja.

b) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ uz operaciju oduzimanja.

c) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ uz operaciju množenja.

d) $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\backslash\{0\}, \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ uz operaciju množenja.

e) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ uz operaciju dijeljenja.

Zadatak 4

Neka je S neprazan skup i $\mathcal{P}(S) = \{X : X \subseteq S\}$ partitivni skup skupa S. Ispitajte svojstva sljedećih struktura:

a) $(\mathcal{P}(S), \cup)$.

b) $(\mathcal{P}(S), \cap)$.

c) $(\mathcal{P}(S), \backslash)$, $A \backslash B = A \cap B^C$.

d) $(\mathcal{P}(S), \triangle)$, $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Zadatak 5

Neka je S neprazan skup. Pokažite da je $(S^S, \circ)$, gdje je S^S skup svih funkcija $f: S \to S$, monoid. $\square$

Napomena 6

Sa $(S^S)^* = B(S)$ označavamo skup svih bijekcija sa S na S. Takve se funkcije zovu permutacije skupa S, a $(B(S), \circ)$ nekomutativna je grupa koju zovemo grupa permutacija skupa S.

Zadatak 6

Pokažimo da je skup $M_n(\mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$ svih realnih kvadratnih matrica reda n monoid uz množenje matrica.

Skup

$$M^*(n,\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R}) = GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R})\colon\ \det A \neq 0\}$$

grupa je uz množenje matrica koja se naziva **opća linearna grupa**. Ona je nekomutativna za $n \geq 2$. Nadalje, skup

$$SL_n(\mathbb{R}) = SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R})\colon\ \det A = 1\}$$

grupa je uz množenje matrica koju zovemo **specijalna linearna grupa** i ona je nekomutativna za $n \geq 2$, a skup

$$O_n(\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R})\colon\ AA^T = A^TA = I\}$$

grupa je uz množenje matrica koju zovemo **ortogonalna grupa**.

Zadatak 7

Neka je G grupoid. Dokažite da je G grupa ako i samo ako zadovoljava sljedeća tri uvjeta:

a) Vrijedi asocijativnost, odnosno $(ab)c = a(bc)$ za sve $a, b, c \in G$.

b) Postoji $e \in G$ takav da je $ea = a$ za sve $a \in G$.

c) Za svaki $a \in G$ postoji $a^{-1} \in G$ takav da je $a^{-1}a = e$.