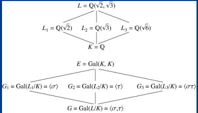

Algebra

Vježbe 10

8.5.2023.

predavač: prof.dr.sc. I.Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Faktorizacija u prstenima polinoma

Teorem

Ako je R integralna domena, onda je $R[x]$ integralna domena.

Napomena

Neka je R integralna domena. Jedini elementi u $R[x]$ koji su invertibilni u $R[x]$ jesu oni konstantni polinomi koji su invertibilni u R.

Definicija

Neka je R integralna domena. Kažemo da je polinom $f \in R[x]$, koji nije ni nul polinom ni invertibilan element u $R[x]$, **ireducibilan nad** R ako kada god f izrazimo kao produkt

$$f(x) = g(x)h(x), \;\; g, h \in R[x],$$

slijedi da je g ili h invertibilan element u $R[x]$. Za nenul neinvertibilan element od $R[x]$ koji nije ireducibilan nad R kažemo da je **reducibilan nad** R.

Napomena

U slučaju da je integralna domena R polje, primijetimo da je polinom $f \in R[x]$ ireducibilan nad R ako i samo ako se f ne može zapisati kao produkt dvaju polinoma nižeg stupnja.

Propozicija

Neka je F polje, $\alpha \in F$ i $f \in F[x]$. Tada je element α nultočka polinoma f ako i samo ako $x - \alpha$ dijeli f.

Teorem

Neka je F polje. Ako je $f \in F[x]$ i ako je stupanj polinoma f jednak 2 ili 3, onda je f reducibilan nad F ako i samo ako f ima nultočku u F.

Zadatak 1

Ispitajte jesu li sljedeći polinomi ireducibilni nad poljem $\mathbb{Z}_5$ i, ukoliko jesu, zapišite ih kao produkt odgovarajućih polinoma:

a) $f_1(x) = x^3 + x + 1$,

b) $f_2(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$.

Propozicija

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ i neka je $\alpha = \frac{b}{d} \in \mathbb{Q}$, gdje su $b \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$ i $(b, d) = 1$, nultočka polinoma f. Tada b dijeli a_0, a d dijeli a_n. Ako je polinom f normiran, onda je $\alpha \in \mathbb{Z}$ i dijeli a_0.

Definicija

Sadržaj nenul polinoma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ najveći je zajednički djelitelj od $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ i označavamo ga s $c(f)$. Kažemo da je polinom s cjelobrojnim koeficijentima **primitivan** ako je sadržaja 1.

Teorem

Neka je f nekonstantan polinom u $\mathbb{Z}[x]$.

a) Ako je f reducibilan nad $\mathbb{Q}$, onda je reducibilan i nad $\mathbb{Z}$.
b) Neka je f primitivan polinom. Polinom f ireducibilan je nad $\mathbb{Z}$ ako i samo ako je ireducibilan nad $\mathbb{Q}$.

Teorem (Eisensteinov kriterij)

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Ako postoji prost broj p takav da

$$p \nmid a_n, \;\; p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_0 \;\text{ i }\; p^2 \nmid a_0,$$

onda je polinom f ireducibilan nad $\mathbb{Q}$.

Zadatak 2

Ispitajte je li polinom $f(x) = x^2 + x - 1$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$ i nad $\mathbb{R}$.

Zadatak 3

Ispitajte je li polinom $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$.

Zadatak 4

Ispitajte jesu li sljedeći polinomi ireducibilni nad $\mathbb{Z}$:

a) $f_1(x) = x^2 + 4x + 2,$

b) $f_2(x) = x^3 - x^2 - 4,$

c) $f_3(x) = x^4 - 10x^2 + 1,$

d) $f_4(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 3,$

e) $f_5(x) = x^{50} + 14x - 56.$

Zadatak 5

Ispitajte jesu li sljedeći polinomi ireducibilni nad $\mathbb{Z}$:

a) $f_1(x) = x^7 + 11x^3 - 33x + 22$,

b) $f_2(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 3$. $\square$

Zadatak 6

Pokažite da je polinom

$$f(x) = \frac{2}{9}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + x^3 + \frac{1}{3}$$

ireducibilan nad $\mathbb{Q}$.

Napomena

Ako je $f \in \mathbb{Q}[x]$ i $a \in \mathbb{Q}$, onda je $f(x)$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$ ako i samo ako je $f(x+a)$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$.

Zadatak 7

Ispitajte je li polinom $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$.

Zadatak 8

Pokažite da je polinom $f(x) = x^4 + 1$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$, a reducibilan nad $\mathbb{R}$.

Zadatak 9

(a) Pokažite da je polinom $f(x) = x^2 + 8x - 2$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$. Je li dani polinom ireducibilan nad $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$?

(b) Je li polinom $g(x) = x^4 - 5x^2 + 2$ ireducibilan u $\mathbb{Z}[x]$?

(c) Je li polinom $h(x) = x^2 + x + 4$ ireducibilan nad $\mathbb{Z}_{11}$? $\square$