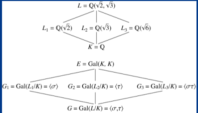

Algebra

Vježbe 11

17.5.2023.

predavač: prof.dr.sc. I.Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

PROŠIRENJE POLJA
Osnovni pojmovi

Definicija

Neka je K polje. Ako je L polje takvo da je $K \subseteq L$, kažemo da je L **proširenje polja** K.

Polje L možemo promatrati kao vektorski prostor nad poljem K. Ako je taj prostor konačnodimenzionalan, kažemo da je L **konačno proširenje polja** K, a prirodan broj $\dim_K L$ nazivamo **stupanj proširenja** i označavamo s $[L : K]$. Ukoliko proširenje L polja K nije konačno, pišemo $[L : K] = \infty$.

Primjer

Polje $\mathbb{C}$ konačno je proširenje polja $\mathbb{R}$.

Primjer

Polje $\mathbb{C}$ nije konačno proširenje polja $\mathbb{Q}$, to jest $[\mathbb{C} : \mathbb{Q}] = \infty$.

Teorem

Neka je K polje i neka je f nekonstantan polinom u $K[x]$. Tada postoji proširenje L polja K u kojem polinom f ima nultočku.

Neka je L proširenje polja K i $\alpha \in L$. Najmanji potprsten od L koji sadrži K i α označavamo s $K[\alpha]$. Vrijedi

$$K[\alpha] = \{f(\alpha) \colon f \in K[x]\}.$$

Nadalje, s $K(\alpha)$ označavamo najmanje potpolje od L koje sadrži K i α.

Definicija

Neka je L proširenje polja K. Za element $\alpha \in L$ kažemo da je **algebarski nad** K ako postoji nekonstantan polinom f u $K[x]$ takav da je $f(\alpha) = 0$. Ako element α nije algebarski nad K, kažemo da je **transcendentan nad** K.

Definicija

Ako je svaki element $\alpha \in L$ algebarski nad K, kažemo da je L **algebarsko proširenje polja** K.

Napomena

Polje $\mathbb{C}$ algebarsko je proširenje polja $\mathbb{R}$.

Zadatak 1

Ispitajte jesu li sljedeći elementi algebarski nad poljem $\mathbb{Q}$:

a) $\sqrt[3]{2}$,

b) π^2.

Zadatak 2

Ispitajte jesu li $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ i $\beta = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ algebarski nad poljem $\mathbb{Q}$.

Neka je $\alpha \in L$ algebarski nad K. Tada je

$$I = \{f \in K[x] \colon f(\alpha) = 0\}$$

ideal u prstenu $K[x]$.

Teorem

Ako je K polje, onda je $K[x]$ domena glavnih ideala.

Kako je $K[x]$ domena glavnih ideala, ideal I glavni je ideal, pa postoji jedinstven normirani polinom μ_α u $K[x]$ takav da je $I = (\mu_\alpha)$. Polinom μ_α zove se **minimalni polinom elementa** $\alpha \in L$ **algebarskog nad** K.

Propozicija

Minimalni polinom μ_α elementa α iz L algebarskog nad K ima sljedeća svojstva:

a) Ako je $f \in K[x]$ takav da je $f(\alpha) = 0$, onda je polinom f djeljiv s polinomom μ_α u $K[x]$.

b) Polinom μ_α ima najmanji stupanj među svim nekonstantnim polinomima iz $K[x]$ kojima je α nultočka.

c) Polinom μ_α jedini je normiran ireducibilni polinom u $K[x]$ kojemu je α nultočka.

Teorem

Neka je L proširenje polja K, element α iz L algebarski nad K i μ_α minimalni polinom od α nad K stupnja m. Tada je

$$K(\alpha) = K[\alpha] = \{f(\alpha) \colon f \in K[x],\ \deg f \leq m-1\}.$$

Nadalje, skup $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}\}$ je baza vektorskog prostora $K(\alpha)$ nad K, odnosno

$$[K(\alpha) : K] = m = \deg \mu_\alpha.$$

Zadatak 3

Nađite minimalni polinom μ_α u $\mathbb{Q}[x]$ i bazu od $\mathbb{Q}(\alpha)$ nad $\mathbb{Q}$ za

a) $\alpha = \sqrt[3]{3} + 1$,

b) $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt[3]{2}}$.

Neka je L proširenje polja K i $S \subseteq L$. Tada s $K(S)$ označavamo najmanje potpolje od L koje sadrži K i S. Ako je $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq L$, onda pišemo

$$K(S) = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Definicija

Za polje L kažemo da je **konačno generirano proširenje polja** K ako postoje $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in L$ takvi da je

$$L = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Teorem

Proširenje L polja K konačno je ako i samo ako je algebarsko i konačno generirano.

Definicija

Proširenje polja K oblika $K(\alpha)$ naziva se **jednostavno proširenje od K**.

Primjer

Polje $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ jednostavno je proširenje polja $\mathbb{Q}$.

Napomena

Neka je L proširenje polja K i neka su a i b elementi od L. Tada je

$$K(a, b) = K(a)(b) = K(b)(a).$$

Zadatak 4

Pokažite da je proširenje $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ polja $\mathbb{Q}$ jednostavno i nađite bazu za njega.

Zadatak 5

Pokažite da je proširenje $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{21})$ polja $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ jednostavno i odredite stupanj proširenja polja $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{21})$ nad poljem $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$. $\square$

Teorem

Neka su $K \subseteq L \subseteq M$ polja. Neka je $\{\alpha_i : i \in I\}$ baza vektorskog prostora L nad poljem K i neka je $\{\beta_j : j \in J\}$ baza vektorskog prostora M nad poljem L. Tada je

$$\{\alpha_i\beta_j : i \in I, j \in J\}$$

baza vektorskog prostora M nad poljem K.

Teorem

Neka su $K \subseteq L \subseteq M$ polja. Tada je

$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K].$$

Pri tome je $\infty \cdot n = n \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty$ za $n \in \mathbb{N}$. Drugim riječima, proširenje M polja K konačno je ako i samo ako su proširenja M od L i L od K konačna i tada je stupanj $[M : K]$ jednak umnošku stupnjeva $[M : L]$ i $[L : K]$.

Zadatak 6

Koristeći činjenicu

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}),$$

odredite stupanj proširenja $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ i nađite bazu od $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ nad $\mathbb{Q}$.

Zadatak 7

Neka je α nultočka polinoma $f(x) = x^3 + x + 3$. Ispitajte je li polinom $p(x) = x^2 - 2$ reducibilan nad $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Zadatak 8

Odredite stupanj proširenja

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$$

i minimalni polinom elementa $\sqrt[6]{2}$ nad $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.