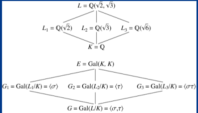

Algebra

Vježbe 12

22.5.2023.

predavač: prof.dr.sc. I.Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Zadatak 9

Odredite stupanj proširenja polja $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3})$ nad poljem $\mathbb{Q}$.

Zadatak 10

Neka je L konačno proširenje polja K. Pretpostavimo da je $[L : K] = p$, gdje je p prost broj. Ako je $\alpha \in L$ i $\alpha \notin K$, dokažite da je $L = K(\alpha)$.

Zadatak 11

Polinom $f(x) = x^3 - x - 1$ ireducibilan je nad $\mathbb{Q}$. Neka je $\alpha \in \mathbb{C}$ nultočka danog polinoma i neka je $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$, ali $\beta \notin \mathbb{Q}$. Pokažite da je tada $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\alpha)$. $\square$

Zadatak 12

Neka su $\alpha, \beta \in L$, gdje je L proširenje polja K, te neka su f i g iz $K[x]$ ireducibilni normirani polinomi nad poljem K. Ako je α nultočka polinoma f i β nultočka polinoma g, pokažite da je f ireducibilan nad $K(\beta)$ ako i samo ako je g ireducibilan nad $K(\alpha)$.

Polja cijepanja

Definicija

Neka je K polje i $f \in K[x]$ nekonstantan polinom. Kažemo da se **polinom** f **cijepa nad proširenjem** L **polja** K ako postoji $a \in K$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in L$ takvi da je

$$f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

Ako je pri tome $L = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, kažemo da je proširenje L **polje cijepanja polinoma** f **nad poljem** K.

Primjer

Polinom $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ cijepa se nad $\mathbb{R}$. Polje cijepanja polinoma f nad $\mathbb{Q}$ jest $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Primjer

Polinom $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ cijepa se nad $\mathbb{C}$. Polje $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \colon a, b \in \mathbb{Q}\}$ polje je cijepanja polinoma f nad $\mathbb{Q}$.

Teorem

Neka je K polje i $f \in K[x]$ nekonstantan polinom. Tada postoji polje cijepanja polinoma f nad K. Štoviše, ako su L_1 i L_2 polja cijepanja polinoma f nad K, onda postoji izomorfizam polja $\varphi \colon L_1 \to L_2$ takav da je $\varphi(x) = x$ za sve $x \in K$.

Algebarski zatvarač

Definicija

Proširenje L polja K naziva se **algebarski zatvarač polja** K ako je to proširenje algebarsko nad K i ako je polje L algebarski zatvoreno, odnosno ako svaki nekonstantan polinom u $L[x]$ ima nultočku u L.

Primjer

Polje $\mathbb{C}$ algebarski je zatvarač polja $\mathbb{R}$.

Teorem

Svako polje K ima algebarski zatvarač. Ako su L_1 i L_2 algebarski zatvarači od K, onda postoji izomorfizam polja $\varphi\colon L_1 \to L_2$ takav da je $\varphi(x) = x$ za sve $x \in K$.

Propozicija

Neka je L algebarsko proširenje polja K. Ako se svaki nekonstantan polinom $f \in K[x]$ cijepa nad L, onda je polje L algebarski zatvoreno.

Zadatak 1

Dokažite da konačno polje nije algebarski zatvoreno.

Izomorfizmi polja

Neka su K i L polja. Izomorfizam je polja K na polje L bijekcija $\varphi\colon K \to L$ takva da je

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \text{ i } \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \text{ za sve } a, b \in K.$$

Lema

Ako su K i L polja, svaki je netrivijalni homomorfizam prstena $\varphi\colon K \to L$ unitalan monomorfizam.

Napomena

Jedini je automorfizam polja racionalnih brojeva identiteta.

Zadatak 1

Dokažite da polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ nisu izomorfna.

Galoisova grupa proširenja

Neka je K polje. **Automorfizam polja** K izomorfizam je polja K na samog sebe. Skup svih automorfizama polja K označavat ćemo s Aut(K) i Aut(K) grupa je s obzirom na kompoziciju.

Također, Aut(K) podgrupa je grupe permutacija skupa K.

Neka je L proširenje polja K. Automorfizam $\sigma \in$ Aut(L) za kojeg vrijedi $\sigma(a) = a$, za sve $a \in K$, nazivamo K**-automorfizam polja** L.

Skup svih K-automorfizama polja L označavamo s Aut$_K(L)$ i Aut$_K(L)$ podgrupa je od Aut(L).

Grupa $\mathrm{Aut}_K(L)$ naziva se **Galoisova grupa proširenja L polja K** i obično se označava s $\mathrm{Gal}(L/K)$, $\mathrm{Gal}(L, K)$, $G(L/K)$ ili $G(L, K)$.

Zadatak 1

Odredite sve automorfizme polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Zadatak 2

Odredite Galoisovu grupu proširenja $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ polja $\mathbb{Q}$.

Zadatak 3

Odredite $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$.

Zadatak 4

Odredite Galoisovu grupu proširenja $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ polja $\mathbb{Q}$.