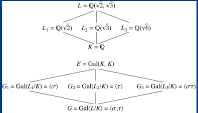

Algebra

Vježbe 13

24.5.2023.

predavač: prof.dr.sc. I.Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Separabilna i normalna proširenja

Definicija

Neka je K polje, $f \in K[x]$ nekonstantan polinom i L polje cijepanja polinoma f nad poljem K. Kažemo da je f **separabilan polinom** ako su sve nultočke od f u L jednostruke, odnosno ako je

$$f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n),$$

$a \in K,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in L,\ \alpha_i \neq \alpha_j \text{ za } i \neq j.$

Definicija

Neka je L proširenje polja K i $\alpha \in L$. Kažemo da je element α **separabilan nad** K ako je α algebarski nad K i ako je njegov minimalni polinom $\mu_\alpha \in K[x]$ separabilan.

Definicia

Kažemo da je L **separabilno proširenje polja** K ako je svaki element iz L separabilan nad K.

Napomena

Neka je K polje karakteristike 0. Tada je svako algebarsko proširenje polja K separabilno.

Definicija

Konačno separabilno proširenje L polja K naziva se **normalno proširenje polja** K ako je L polje cijepanja nekog polinoma $f \in K[x]$ nad K.

Propozicija

Neka je L konačno separabilno proširenje polja K. Tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:

a) L je normalno proširenje polja K.

b) Ako je $f \in K[x]$ ireducibilan polinom koji ima nultočku u polju L, onda se f cijepa nad poljem L.

c) $|\operatorname{Aut}_K(L)| = [L : K]$.

d) Vrijedi
$$K = L^{\operatorname{Aut}_K(L)} = \{x \in L \colon \sigma(x) = x, \text{ za sve } \sigma \in \operatorname{Aut}_K(L)\}.$$

Definicija

Galoisova grupa polinoma $f \in K[x]$ nad poljem K grupa je $\text{Aut}_K(L)$, gdje je L polje cijepanja polinoma f nad poljem K.

Zadatak 1

Odredite Galoisovu grupu polinoma $f(x) = x^4 + 1$ nad poljem $\mathbb{Q}$.

Zadatak 2

Odredite Galoisovu grupu polinoma $f(x) = x^4 - 2$ nad poljem $\mathbb{Q}$.

Zadatak 3

Odredite Galoisovu grupu polinoma $f(x) = x^4 + 4x^2 + 2$ nad poljem $\mathbb{Q}$.

Zadatak 4

Odredite Galoisovu grupu polinoma $f(x) = x^4 + 6x^2 + 6$ nad poljem $\mathbb{Q}$. $\square$

Zadatak 5

Odredite Galoisovu grupu polinoma $f(x) = x^4 - 4x^2 + 10$ nad $\mathbb{Q}$. $\square$