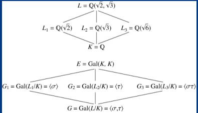


# Algebra

## Vježbe 2

15.3.2023.

predavač: prof.dr.sc. I.Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

## Definicija i osnovni primjeri grupa

### Zadatak 8

Dan je skup $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ za $m \in \mathbb{N}$. Provjerite svojstva sljedećih struktura:

a) $(\mathbb{Z}_m, +_m)$, gdje je $+_m : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$ operacija definirana s $a +_m b = a + b \pmod{m}$.

b) $(\mathbb{Z}_m, \cdot_m)$, gdje je $\cdot_m : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$ operacija definirana s $a \cdot_m b = a \cdot b \pmod{m}$.

c) $(\mathbb{Z}_m \backslash \{0\}, \cdot_m)$, gdje je $\cdot_m : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$ operacija definirana s $a \cdot_m b = a \cdot b \pmod{m}$.

## Napomena

Radi jednostavnosti ćemo $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ pisati kao $(\mathbb{Z}_m, +)$ (analogno za ostale operacije). Također, kada je jasno uz koju je operaciju neki skup grupa, često se ta operacija izostavlja i kažemo samo $G$ je grupa umjesto $(G, *)$ je grupa.

## Primjer 1

Napravimo tablicu zbrajanja za grupu $(\mathbb{Z}_3, +)$.

## Primjer 2

Napravimo tablicu množenja za grupu $(\mathbb{Z}_3^*, \cdot)$.

## Zadatak 9

Pokažite da je skup $K_4 = \{1, -1, i, -i\}$ grupa uz množenje kompleksnih brojeva i napravite Cayleyevu tablicu za tu grupu. □

## Zadatak 10

Ispitajte svojstva strukture $\mathbb{Q}$ uz binarnu operaciju $*$ definiranu s

$$a * b = a + b - ab \text{ za sve } a, b \in \mathbb{Q}.$$

## Zadatak 11

Neka je $\mathbb{R}$ grupoid uz binarnu operaciju $*$ definiranu s

$$a * b = a + b - 2a^2b^2 \text{ za sve } a, b \in \mathbb{R}.$$

Ispitajte je li grupoid $\mathbb{R}$ polugrupa, vrijedi li svojstvo komutativnosti te odredite neutralni element u grupoidu $\mathbb{R}$. □

## Napomena

Neka su $(G_1, *)$, $(G_2, \star)$ grupe i neka je $G_1 \times G_2$ skup svih parova $(a_1, a_2)$, gdje je $a_1 \in G_1$, a $a_2 \in G_2$. Na skupu $G_1 \times G_2$ definiramo binarnu operaciju s

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 * b_1, a_2 \star b_2) \text{ za sve } (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$$

s obzirom na koju $G_1 \times G_2$ postaje grupa. Neutralni element grupe $G_1 \times G_2$ jest $(e_1, e_2)$, gdje je $e_1$ neutralni element u $G_1$ i $e_2$ neutralni element u $G_2$, a inverzni element od $(a_1, a_2)$ jest $(a_1^{-1}, a_2^{-1})$. Analogno, za konačno mnogo grupa $G_1, G_2, \ldots, G_n$ definiramo njihov produkt kao $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$.

## Primjer 3

Skup
$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \colon a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$
grupa je uz zbrajanje realnih brojeva po komponentama, to jest

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

za sve $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Analogno vrijedi za $\mathbb{C}^n$.

## Primjer 4

Skup $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{Z}_2\}$ grupa je uz operaciju

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 +_2 a_2, b_1 +_2 b_2) \text{ za } (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

### Definicija

Broj elemenata grupe $G$ naziva se **red grupe** $G$ i označava s $|G|$.
Kažemo da je grupa $G$ **konačna** ako je $G$ konačan skup, a u suprotnom kažemo da je grupa $G$ **beskonačna**.

### Primjer 5

$(\mathbb{Z}_4, +)$ konačna je grupa jer je $|\mathbb{Z}_4| = 4$.

### Primjer 6

$(\mathbb{Z}, +)$ beskonačna je grupa.

## Primjer 7

Neka je $G$ grupa reda $2$. Napravimo Cayleyevu tablicu za $G$.

## Primjer 8

Napravite Cayleyevu tablicu za grupu reda $3$.

## Primjer 9

Napravimo Cayleyevu tablicu za grupu reda $4$.

# Podgrupe

### Definicija 1

*Neka je $G$ grupa i $H$ podskup od $G$. Kažemo da je $H$ **podgrupa od** $G$ ako je $H$ grupa s obzirom na istu operaciju.*

Ako je $H$ podgrupa grupe $G$, pišemo $H \leq G$. Svaka grupa $G$ ima barem dvije podgrupe, a to su sama grupa $G$ i $\{e\}$. Te podgrupe zovu se trivijalne podgrupe od $G$. Za podgrupu koja nije trivijalna kažemo da je netrivijalna podgrupa od $G$.

Ako je $H$ podgrupa grupe $G$, ali nije jednaka grupi $G$, kažemo da je $H$ **prava podgrupa od** $G$.

## Teorem 1

*Podskup $H$ podgrupa je od $G$ ako i samo ako vrijede sljedeća tri uvjeta:*

1) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$,
2) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$,
3) $e \in H$.

*Ukoliko je podskup $H$ neprazan, uvjetima $1)$, $2)$ i $3)$ ekvivalentan je uvjet:*

4) $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

## Primjer 2

Vrijedi: $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$.

## Napomena 3

Ponekad, kada želimo pokazati da je neki skup grupa, može biti lakše pokazati da je dani skup podgrupa neke grupe nego direktno provjeravati aksiome grupe.

## Zadatak 1

Ispitajte jesu li sljedeće strukture grupe:

a) $(S^1, \cdot)$, gdje je $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$.

*b)* $(K_n, \cdot)$, gdje je $K_n = \{z \in \mathbb{C} \colon z^n = 1\}$ za $n \in \mathbb{N}$, skup $n$-tih korijena iz jedinice.

c) $(x\mathbb{Z}, +)$ za $x \in \mathbb{C}$.

## Zadatak 2

Pokažite da je $SL(n, \mathbb{R})$ podgrupa od $GL(n, \mathbb{R})$.

## Zadatak 3

Ispitajte jesu li sljedeći skupovi grupe uz pripadne binarne operacije:

a) $G_1 = \{m + n\sqrt{2} + k\sqrt{8} \colon m, n, k \in \mathbb{Z}\}$;

  $a_1)$ uz zbrajanje realnih brojeva,

  $a_2)$ uz množenje realnih brojeva.

b) $G_2 = \{(z, \overline{z}) \colon z \in \mathbb{C}\}$ uz zbrajanje kompleksnih brojeva;

c) $G_3 = \{0, 2, 4\}$;

  $c_1)$ uz zbrajanje modulo $5$,

  $c_2)$ uz množenje modulo $5$.

## Zadatak 4

Pokažite da $H = \{a + bi \colon a, b \in \mathbb{R}, ab \geq 0\}$ nije podgrupa od $\mathbb{C}$ uz zbrajanje kompleksnih brojeva.