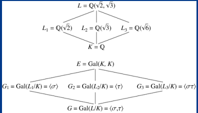

Algebra

Vježbe 3

22.3.2023.

predavač: prof.dr.sc. I.Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Podgrupe

Zadatak 5

Neka je H podgrupa od $\mathbb{R}$ uz zbrajanje realnih brojeva. Pokažite da je skup $K = \{2^a : a \in H\}$ podgrupa od $\mathbb{R}^*$ uz množenje realnih brojeva.

Zadatak 6

Dokažite da je

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

podgrupa od $GL(2, \mathbb{R})$. $\square$

Definicija

Centar grupe G, u oznaci $Z(G)$, podskup je svih elemenata u G koji komutiraju sa svakim elementom od G, to jest

$$Z(G) = \{a \in G \colon ag = ga, \forall g \in G\}.$$

Teorem

Centar grupe G podgrupa je od G.

Napomena

Grupa G Abelova je ako i samo ako je $G = Z(G)$.

Zadatak 7

Dokažite da je $Z(GL(n, \mathbb{R})) = \{\lambda I \colon \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

Homomorfizmi grupa

Definicija

Neka su $(G_1, *)$ i $(G_2, \star)$ grupe. Preslikavanje $\varphi\colon G_1 \to G_2$ zove se **homomorfizam grupa** ako vrijedi

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \star \varphi(b) \text{ za sve } a, b \in G_1.$$

Skup svih homomorfizama s G_1 u G_2 označavamo s Hom(G_1, G_2).

Ako je φ homomorfizam grupa koji je injekcija, onda kažemo da je φ **monomorfizam grupa**, a ako je φ homomorfizam grupa koji je surjekcija, onda kažemo da je φ **epimorfizam grupa**.

Homomorfizam grupa koji je bijekcija nazivamo **izomorfizam grupa**. Ako postoji izomorfizam grupa $\varphi\colon G_1 \to G_2$, kažemo da je grupa G_1 izomorfna grupi G_2 i u tom slučaju pišemo $G_1 \cong G_2$. Relacija $\cong$ relacija je ekvivalencije.

Izomorfizam grupa $\varphi\colon G \to G$ naziva se **automorfizam** i skup svih automorfizama od G označavamo s $\mathrm{Aut}(G)$.

Ako su $\varphi_1\colon G_1 \to G_2$ i $\varphi_2\colon G_2 \to G_3$ homomorfizmi grupa, onda je i njihova kompozicija $\varphi_2 \circ \varphi_1\colon G_1 \to G_3$ homomorfizam grupa. Analogno vrijedi za kompoziciju monomorfizama grupa, epimorfizama grupa i izomorfizama grupa.

Propozicija

Neka je $\varphi\colon G_1 \to G_2$ homomorfizam grupa. Tada vrijedi:

a) $\varphi(e_{G_1}) = e_{G_2}$,

b) $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$ za sve $a \in G_1$.

Definicija

Neka je $\varphi\colon G_1 \to G_2$ homomorfizam grupa. Skup

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(a) \colon a \in G_1\}$$

nazivamo **slika homomorfizma** φ, a skup

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{a \in G_1 \colon \varphi(a) = e_{G_2}\}$$

nazivamo **jezgra homomorfizma** φ.

Propozicija

Neka je $\varphi\colon G_1 \to G_2$ homomorfizam grupa. Tada je slika homomorfizma φ podgrupa od G_2, a jezgra homomorfizma φ podgrupa od G_1.

Propozicija

Homomorfizam grupa $\varphi\colon G_1 \to G_2$ monomorfizam je ako i samo ako je $\operatorname{Ker}\varphi = \{e_{G_1}\}$.

Zadatak 1

Dokažite da je preslikavanje $\varphi\colon GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ definirano s

$$\varphi(A) = \det A$$

epimorfizam grupa i odredite mu jezgru.

Zadatak 2

Pokažite da je preslikavanje $x \mapsto i^x$ homomorfizam grupe $(\mathbb{Z}, +)$ u grupu $(K_4, \cdot)$ te da je Ker $\varphi = \{m \in \mathbb{Z} \colon m = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$. Je li φ epimorfizam grupa? $\square$

Zadatak 3

Neka je $\varphi \colon G_1 \to G_2$ homomorfizam grupa. Dokažite da ako je G_1 Abelova grupa, onda je i Im φ Abelova grupa.

Zadatak 4

Dokažite da je grupa G Abelova grupa ako i samo ako je preslikavanje $\varphi \colon G \to G$ definirano s $\varphi(a) = a^{-1}$ automorfizam.

Zadatak 5

Neka je za dani element a iz grupe G definirano preslikavanje $\varphi_a \colon G \to G$ s

$$\varphi_a(x) = axa^{-1}.$$

Dokažite da je φ_a automorfizam grupe G. (Taj automorfizam naziva se unutrašnji automorfizam grupe G).

Napomena

Neka je s $\mathrm{Int}(G)$ označen skup svih unutrašnjih automorfizama grupe G. $\mathrm{Int}(G)$ grupa je u odnosu na kompoziciju.

Zadatak 6

Dokažite da grupe $\mathbb{R}^*$ i $\mathbb{C}^*$ nisu izomorfne.

Napomena

Svaka grupa reda 4 izomorfna je ili grupi $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ ili grupi $(\mathbb{Z}_4, +)$.

Zadatak 7

Pokažite da grupe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ i $(\mathbb{Z}_4, +)$ nisu izomorfne. $\square$

Simetrična grupa

Neka je S neprazan skup. **Permutacija skupa** S bijekcija je sa S na S.

Skup svih permutacija skupa S označavamo s $B(S)$, a $(B(S), \circ)$ jest **grupa permutacija skupa** S koja je nekomutativna grupa za $|S| \geq 3$.

Ako je $|S| = n$, onda se grupa permutacija skupa S naziva **simetrična grupa** $n-$**tog reda** i označava sa S_n. Red grupe S_n jest $n!$.

Ako su σ, τ u S_n, njihovu kompoziciju $\sigma \circ \tau$ označavat ćemo kraće s $\sigma\tau$ i zvati **produkt permutacija σ i τ**.

Permutaciju $\sigma\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ zapisivat ćemo na sljedeći način:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Zadatak 1

Ako je $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ i $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, odredite $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^{-1} i τ^{-1}.