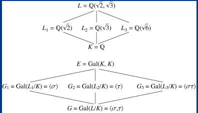

Algebra

Vježbe 4

29.3.2023.

predavač: prof.dr.sc. I.Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Definicija

Za permutaciju $\sigma \in S_n$ kažemo da je $k-$**ciklus** ili **ciklus duljine** k, gdje je $1 \leq k \leq n$ ako postoje $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takvi da je $\sigma(c_1) = c_2, \sigma(c_2) = c_3, \ldots, \sigma(c_{k-1}) = c_k, \sigma(c_k) = c_1$ i $\sigma(j) = j$ za sve $j \notin \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$. Takav $k-$ciklus označavamo sa

$$\sigma = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \in S_n.$$

Za cikluse kažemo da su disjunktni ako su podskupovi od $\{1, 2, \ldots, n\}$ koje oni ciklički permutiraju međusobno disjunktni.

Napomena

Disjunktni ciklusi komutiraju.

Propozicija

Svaka je permutacija $\sigma \in S_n$ ili ciklus ili produkt međusobno disjunktnih ciklusa koji su jedinstveno određeni sa σ.

Zadatak 2

Prikažite permutaciju

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & 8 & 1 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in S_8$$

u obliku produkta disjunktnih ciklusa.

Zadatak 3

Napišite $\sigma\tau$ kao produkt disjunktnih ciklusa ako je $\sigma = (1,3,2,4)(5,6)$ i $\tau = (1,5,6)(2,4,3)$.

Zadatak 4

Odredite sve permutacije na skupu S_3 i napravite pripadnu Cayleyevu tablicu. $\square$

Definicija

Ciklus duljine 2 ili $2-$ciklus naziva se **transpozicija**.

Propozicija

Svaka je permutacija $\sigma \in S_n, n > 1$ ili transpozicija ili produkt transpozicija.

Lema

Svaki $k-$ciklus za $k > 2$ produkt je $k-1$ transpozicija.

Definicija

Permutacija σ **parna** je ako se može prikazati kao produkt parnog broja transpozicija. U suprotnom kažemo da je **permutacija** σ **neparna**.

Definicija

Ako je permutacija σ parna, definiramo $\operatorname{sgn} \sigma = 1$, a ako je permutacija σ neparna, definiramo $\operatorname{sgn} \sigma = -1$. Broj $\operatorname{sgn} \sigma$ nazivamo **predznak permutacije** σ i preslikavanje

$$\operatorname{sgn} \colon (S_n, \circ) \to (\{-1, 1\}, \cdot)$$

homomorfizam je grupa.

Identiteta je parna permutacija.

Predznak ciklusa duljine k jest $(-1)^{k-1}$ pa, rastavimo li permutaciju u produkt disjunktnih ciklusa, lako možemo izračunati predznak svake permutacije.

$\operatorname{sgn} \sigma^{-1} = \operatorname{sgn} \sigma$

Zadatak 5

Odredite parnost permutacije $\sigma \in S_8$ zadane sa
$\sigma = (1,2,4)(3,6)(5,7)$.

Napomena

Red $k-$ciklusa jest k. Red permutacije konačnog skupa zapisane kao produkt disjunktnih ciklusa najmanji je zajednički višekratnik redova ciklusa.

Zadatak 6

Odredite red permutacije $\sigma = (4,5)(2,3,7)$.

Normalne i kvocijentne podgrupe

Definicija

Neka je H podgrupa grupe G te neka su $a, b \in G$. Kažemo da je a **desno kongruentan** b **modulo** H ako je $b^{-1}a \in H$. Pišemo $a \sim^H b$.

Napomena

Relacija $\sim^H$ relacija je ekvivalencije na skupu G.

Napomena

Za $a \in G$ s $[a]$ označit ćemo klasu ekvivalencije u odnosu na relaciju $\sim^H$ u kojoj se nalazi element a:

$$[a] = \{b \in G \colon b \sim^H a\} = \{b \in G \colon a^{-1}b \in H\}$$

$$= \{b \in G \colon b = ah, h \in H\}.$$

Lema

Neka je H podgrupa grupe G i $a \in G$. Tada je

$$[a] = \{ah \colon h \in H\} = aH.$$

Klase ekvivalencije $[a] = aH$ zovu se **desne klase u grupi G u odnosu na podgrupu H** ili, kraće, **desne $H-$klase u G**. Grupa G disjunktna je unija svojih desnih $H-$klasa.

Analogno se definira relacija **biti lijevo kongruentan modulo** H:

$$a \overset{H}{\sim} b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H.$$

Relacija $\overset{H}{\sim}$ relacija je ekvivalencije na skupu G, a klasa ekvivalencije koja sadrži element $a \in G$ jednaka je

$$[a] = \{ha \colon h \in H\} = Ha.$$

Klase Ha zovu se **lijeve klase u grupi** G **u odnosu na podgrupu** H ili, kraće, **lijeve** $H-$**klase u** G. Grupa G disjunktna je unija svojih lijevih $H-$klasa.

Napomena

U konačnoj grupi G vrijedi $|Ha| = |H| = |aH|$ za sve $a \in G$.

Teorem 1

(Lagrange) Neka je G konačna grupa i H podgrupa od G. Tada je red grupe G djeljiv redom grupe H.

Definicija

Broj različitih desnih (lijevih) $H-$klasa u G označava se s $[G : H]$ i naziva **indeks podgrupe H u G**. Za podgrupu H grupe G kažemo da je **konačnog indeksa** u grupi G ako ima samo konačno mnogo različitih desnih (lijevih) $H-$klasa u grupi G.

Napomena

Ako je H podgrupa konačne grupe G, onda prema Lagrangeovom teoremu vrijedi:

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|}.$$

Lema

Ako je G konačna grupa prostog reda, onda G nema netrivijalnih pravih podgrupa.

Zadatak 1

Dokažite da grupa S_9 nema podgrupu reda 11.

Zadatak 2

Neka je G grupa i $\varphi\colon \mathbb{Z}_{17} \to G$ homomorfizam koji nije monomorfizam. Odredite formulu za $\varphi(x)$.

Zadatak 3

Neka je G Abelova grupa neparnog reda. Dokažite da je umnožak svih elemenata grupe G neutralni element te grupe.

Definicija

Podgrupa H grupe G zove se **normalna podgrupa** od G, u oznaci $H \trianglelefteq G$, ako vrijedi

$$aH = Ha \text{ za sve } a \in G.$$

Napomena

Lako je vidjeti da je $H \trianglelefteq G$ ako i samo ako je $aHa^{-1} = H$ za sve $a \in G$.

Napomena

Svaka je podgrupa Abelove grupe normalna.

Zadatak 4

Dokažite da je $SL(n, \mathbb{R})$ normalna podgrupa od $GL(n, \mathbb{R})$.

Zadatak 5

Neka je $\varphi \colon G_1 \to G_2$ epimorfizam grupa. Ako je $N \trianglelefteq G_1$, dokažite da je onda $\varphi(N) \trianglelefteq G_2$. $\square$

Definicija

Neka je G grupa i neka je H normalna podgrupa od G. Skup

$$G/H = \{aH \colon a \in G\}$$

svih $H-$klasa u G grupa je koju zovemo **kvocijentna grupa po normalnoj podgrupi** H uz operaciju

$$(aH)(bH) = abH.$$

Napomena

U kvocijentnoj grupi G/H, $a^{-1}H$ inverzni je element od aH, a $eH = H$ neutralni je element.

Teorem 2

Neka je $\varphi\colon G_1 \to G_2$ *homomorfizam grupa.*

a) *Ker* φ *normalna je podgrupa od* G_1.

b) *Preslikavanje* $\Phi\colon G_1/\,\text{Ker}\,\varphi \to \text{Im}\,\varphi$ *definirano s*

$$\Phi(a\,\text{Ker}\,\varphi) = \varphi(a) \;\; za \;\; a \in G_1$$

izomorfizam je kvocijentne grupe $G_1/\,\text{Ker}\,\varphi$ *na grupu Im* φ.

Napomena

Dio b) teorema 2 zove se **Prvi teorem o izomorfizmu za grupe**.

Zadatak 6

Dokažite da je grupa $\mathbb{C}^*/S^1$ izomorfna grupi $\mathbb{R}^*_+$.

Napomena

Homomorfizam grupa $\varphi\colon G \to H$ **trivijalni** je **homomorfizam** ako je

$$\varphi(g) = e_H \text{ za sve } g \in G.$$

Uočimo da je tada $|\operatorname{Im} \varphi| = 1$.

Zadatak 7

Neka je $\varphi\colon G \to H$ netrivijalni homomorfizam grupa i neka je $|G| = 24$, $|H| = 15$. Odredite red jezgre i slike preslikavanja φ.

Zadatak 8

Neka je $\varphi\colon S_3 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ netrivijalni homomorfizam grupa. Odredite red slike preslikavanja φ.