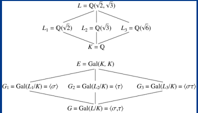

Algebra

Vježbe 5

5.4.2023.

predavač: prof.dr.sc. I.Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Cikličke grupe

Neka je G grupa i a element u G. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $a^n = a \cdot a \cdots a$ (imamo n faktora) i pri tome je $a^0 = e$.

Također, neka je $a^{-n} = (a^{-1})^n$, gdje je a^{-1} inverz od a.

Za $m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi $a^{m+n} = a^m a^n$.

Za neprazan podskup S grupe G, za najmanju podgrupu koja sadrži skup S kažemo da je **generirana sa** S i označavamo je sa $\langle S \rangle$.

Posebno,

$$\langle a \rangle = \langle \{a\} \rangle$$

podgrupa je od G generirana elementom $a \in G$ i to je najmanja podgrupa od G koja sadrži a.

Definicija

Grupa G naziva se **ciklička grupa** ako je generirana jednim elementom, odnosno ako postoji element $a \in G$ takav da je $G = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ i označavamo ju s $G = \langle a \rangle$.

Lema

Svaka je ciklička grupa Abelova.

Lema

Neka je K podgrupa aditivne grupe $\mathbb{Z}$. Tada je ili $K = \{0\}$ ili postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $K = m\mathbb{Z}$.

Propozicija

Neka je G grupa i $a \in G$. Tada vrijedi jedna od sljedećih dviju mogućnosti:

a) $\langle a \rangle$ je beskonačna grupa i tada je $\langle a \rangle = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, e, a^1, a^2, \dots\} \cong \mathbb{Z}$.

b) $\langle a \rangle$ je konačna grupa i tada je $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{m-1}\} \cong \mathbb{Z}_m$ za neki $m \in \mathbb{N}$.

Definicija

Neka je G grupa i $a \in G$. Red cikličke grupe generirane s a nazivamo **red ili period elementa** a. To je najmanji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a^n = e$, ako takav postoji, i označava se s $|a|$. Ako takav n ne postoji, kažemo da je element a beskonačnog reda.

Lema

a) $|\langle a \rangle| = |a|$.

b) U konačnoj grupi red elementa dijeli red grupe.

c) Za sve elemente a u konačnoj grupi G vrijedi $a^{|G|} = e$.

d) Neka je a element reda n u grupi G. Ako je $a^k = e$, onda n dijeli k.

Propozicija

Ako je G grupa prostog reda i $a \in G$, $a \neq e$, onda je $\langle a \rangle = G$.

Lema

Neka je $\varphi\colon G_1 \to G_2$ homomorfizam grupa. Ako je element $g \in G_1$ konačnog reda, onda je red od g djeljiv redom od $\varphi(g)$.

Napomena

Uočimo da se u grupi $\mathbb{Z}_4$ nalaze neutralni element, dva elementa reda 4 i jedan reda 2, a da su u grupi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ svi elementi, izuzev neutralnog elementa, reda 2.

Zadatak 1

Odredite redove danih elemenata u zadanim grupama:

a) i u grupi $\mathbb{C}^*$,

b) 1 i 4 u grupi $\mathbb{Z}_6$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ u grupi $GL(2,\mathbb{R})$.

Zadatak 2

Dokažite da u konačnoj grupi G za sve elemente $a, b \in G$ vrijedi:

a) $|a| = |a^{-1}|$,

b) $|a| = |b^{-1}ab|$,

c) $|ab| = |ba|$.

Zadatak 1

Odredite redove danih elemenata u zadanim grupama:

a) i u grupi $\mathbb{C}^*$,

b) 1 i 4 u grupi $\mathbb{Z}_6$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ u grupi $GL(2, \mathbb{R})$.

Zadatak 2

Dokažite da u konačnoj grupi G za sve elemente $a, b \in G$ vrijedi:

a) $|a| = |a^{-1}|$,

b) $|a| = |b^{-1}ab|$,

c) $|ab| = |ba|$.

Zadatak 3

Ako grupa G sadrži točno jedan element reda 2, dokažite da je taj element iz centra grupe G.

Zadatak 4

Neka su a i b međusobno različiti elementi grupe G koji su različiti od neutralnog elementa, a za koje vrijedi

$$a^3 = b^4 = e \text{ i } ba = ab^3.$$

Odredite red elementa ab.

Zadatak 5

Pretpostavimo da grupa G sadrži elemente a i b takve da je $|a| = 4$, $|b| = 2$ te $a^3 b = ba$. Odredite red elementa ab. □

Zadatak 6

Neka je G grupa reda 155 te neka su a i b elementi grupe G različitog reda i različiti od neutralnog elementa. Dokažite da ne postoji prava podgrupa od G koja sadrži elemente a i b.

Napomena

Red permutacije $\sigma \in S_n$ red je elementa grupe S_n, odnosno najmanji prirodan broj k takav da je $\sigma^k = e$. Zapišemo li permutaciju σ kao produkt disjunktnih ciklusa, za računanje reda dane permutacije koristimo napomenu s prethodnih vježbi.

Zadatak 7

Dan je homomorfizam $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_8$ takav da je

$$\varphi(1) = (2,5)(1,4,6,7).$$

Odredite $\varphi(14)$ i jezgru homomorfizma φ.

Napomena

Grupa $\mathbb{Z}_m$ za $m \geq 1$ ciklička je grupa i cijeli je broj k generator grupe $\mathbb{Z}_m$ ako i samo ako su k i m relativno prosti.

Napomena

U grupi $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{m-1}\}$ jest a^k generator grupe ako i samo ako su k i m relativno prosti.

Propozicija

Neka je G ciklička grupa.

a) Svaka je podgrupa od G ciklička.

b) Kvocijentna grupa G/H ciklička je za svaku podgrupu H od G.

Zadatak 8

Nađite sve podgrupe od $\mathbb{Z}_6$.

Napomena

Neka je G ciklička grupa reda m, a H ciklička grupa reda n, gdje su m i n relativno prosti prirodni brojevi. Tada je grupa $G \times H$ ciklička.

Zadatak 9

Dokažite da grupa $(\mathbb{Q}, +)$ nije ciklička grupa.

Zadatak 10

Neka je N normalna podgrupa od G takva da je kvocijentna grupa G/N reda n. Dokažite da vrijedi sljedeće:

a) $a^n \in N$ za sve $a \in G$.

b) Ako je $a \in G$ i $a^k \in N$ za $k \in \mathbb{N}$ relativno prost s n, onda je $a \in N$.