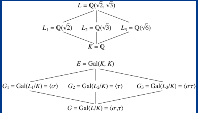

Algebra

Vježbe 6

12.4.2023.

predavač: prof.prof.dr.sc. I.Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Cikličke grupe

Zadatak 11

Ako je $G/Z(G)$ ciklička grupa, dokažite da je tada G Abelova grupa.

Napomena

Svaki homomorfizam $\varphi\colon G \to H$, gdje je G ciklička grupa, potpuno je određen djelovanjem na generatoru grupe G.

Propozicija

Neka je $\varphi\colon G_1 \to G_2$ izomorfizam grupa.

a) Za sve elemente a grupe G_1 jest $|a| = |\varphi(a)|$.
b) Ako je grupa G_1 Abelova, onda je i grupa G_2 Abelova.
c) Ako je grupa G_1 ciklička, onda je i grupa G_2 ciklička.
d) Ako je grupa G_1 konačna, onda G_1 i G_2 imaju jednak broj elemenata svakog reda.

Propozicija

Cikličke su grupe istog reda međusobno izomorfne.

Zadatak 12

Pokažite da grupa $(K_4, \cdot)$ nije izomorfna grupi $(A, \cdot_8)$, za $A = \{1, 3, 5, 7\}$.

Zadatak 13

Neka je G grupa i neka je indeks od $Z(G)$ u G jednak 4. Dokažite da je tada grupa $G/Z(G)$ izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Zadatak 14

Dokažite da nekomutativna grupa G reda pq, gdje su p i q prosti brojevi, ima trivijalan centar. $\square$

Zadatak 15

Dokažite da grupa $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* = \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}^*\}$ uz množenje po komponentama nije izomorfna multiplikativnoj grupi $\mathbb{C}^*$.

Sylowljevi teoremi

Definicija

Neka je G konačna grupa i neka je p prost broj. Za grupu G kažemo da je $p-$**grupa** ako je $|G| = p^n$ za neki prirodan broj n. Kažemo da je podgrupa H grupe G $p-$**podgrupa od** G ako je H $p-$grupa.

Definicija

Podgrupa od G reda p^k za p prost broj, gdje je p^k najveća potencija od p koja dijeli red grupe G, naziva se **Sylowljeva** $p-$**podgrupa od** G.

Teorem (Cauchy)

Neka je G konačna grupa i neka je p prost broj koji dijeli red grupe G. Tada grupa G sadrži podgrupu reda p. Drugim riječima, grupa G sadrži element reda p.

Teorem (Prvi Sylowljev teorem)

Neka je G konačna grupa reda $p^n m$, gdje je $n \geq 1$, p prost broj i $(p, m) = 1$. Tada grupa G sadrži podgrupu reda p^i za svaki $1 \leq i \leq n$ i svaka podgrupa od G reda p^i, $i < n$, normalna je u nekoj podgrupi reda p^{i+1}. Posebno, postoji Sylowljeva $p-$podgrupa grupe G.

Teorem (Drugi Sylowljev teorem)

Neka je G konačna grupa i neka je p prost broj koji dijeli red grupe G.

a) Svaka $p-$podgrupa grupe G sadržana je u nekoj Sylowljevoj $p-$podgrupi grupe G.

b) Sve Sylowljeve $p-$podgrupe grupe G konjugirane su, to jest ako su H i K Sylowljeve $p-$podgrupe grupe G, onda postoji $a \in G$ takav da je $K = aHa^{-1}$.

Teorem (Treći Sylowljev teorem)

Neka je G konačna grupa i neka je p prost broj koji dijeli red grupe G. Broj Sylowljevih $p-$podgrupa od G dijeli red od G i oblika je $kp + 1$ za neki $k \geq 0$.

Zadatak 1

Dokažite da je konačna grupa G $p-$grupa ako i samo ako je red svakog elementa grupe G potencija broja p.

Zadatak 2

Neka je N normalna podgrupa od G. Ako su grupe N i G/N $p-$grupe, dokažite da je tada i G $p-$grupa.

Zadatak 3

Dokažite da ako grupa G ima samo jednu Sylowljevu $p-$podgrupu H, onda je H normalna podgrupa od G.

Zadatak 4

Dokažite da je svaka podgrupa reda 17 u grupi reda 255 normalna podgrupa.

Zadatak 5

Ako grupa G reda 56 nema normalnu podgrupu reda 7, odredite koliko je elemenata u grupi G neparnog, a koliko parnog reda.

Definicija

Kažemo da je grupa G **prosta** ako su jedine njene normalne podgrupe $\{e\}$ i G, odnosno ako G nema netrivijalnih normalnih podgrupa.

Zadatak 6

Pokažite da grupa reda 12 nije prosta.

Zadatak 7

Pokažite da grupa reda 30 nije prosta.

Zadatak 8

Dokažite ili opovrgnite:

(a) Svaka grupa reda 45 ima normalnu podgrupu reda 9.

(b) Grupa reda 40 nema normalnu podgrupu reda 5. $\square$