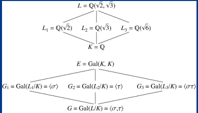

Algebra

Vježbe 8

26.4.2023.

predavač: prof.dr.sc. I.Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Definicija

Kažemo da je element r prstena R **idempotentan** ako vrijedi $r^2 = r$.

Zadatak 9

Neka je R komutativan netrivijalan prsten s jedinicom 1 i $r \in R$. Dokažite da je prsten $Rr = \{ar \colon a \in R\}$ potprsten od R. Zatim, ukoliko je svaki element u prstenu R idempotentan, pokažite da je tada $r = 1r \in Rr$ jedinica prstena Rr.

Zadatak 10

Neka je svaki element prstena R idempotentan. Dokažite sljedeće tvrdnje:

a) Za svaki element $r \in R$ vrijedi $r = -r$.

b) Prsten R jest komutativan.

Zadatak 11

Neka je R komutativan netrivijalan prsten s jedinicom 1. Ako je svaki element prstena R idempotentan, pokažite da je tada element $1 - r$ idempotentan. $\square$

Homomorfizam prstena

Definicija 1

*Neka su R i S prsteni. Preslikavanje $\varphi\colon R \to S$ zove se **homomorfizam prstena** ako vrijedi*

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \;\; i \;\; \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \;\; za \;\; sve \;\; a, b \in R.$$

Homomorfizam prstena koji je injekcija nazivamo **monomorfizam prstena**, a homomorfizam prstena koji je surjekcija nazivamo **epimorfizam prstena**.

Homomorfizam prstena koji je bijekcija nazivamo **izomorfizam prstena**. Ako postoji izomorfizam prstena $\varphi\colon R \to S$, kažemo da je prsten R izomorfan prstenu S.

Inverzno preslikavanje izomorfizma prstena izomorfizam je prstena i kompozicija $\psi \circ \varphi\colon R \to T$ izomorfizama prstena $\varphi\colon R \to S$ i $\psi\colon S \to T$ izomorfizam je prstena. Prema tome, biti izomorfan relacija je ekvivalencije.

Propozicija

Neka je $\varphi\colon R \to S$ homomorfizam prstena. Tada vrijedi:

a) $\varphi(0) = 0$,

b) $\varphi(-r) = -\varphi(r)$ za sve $r \in R$.

Propozicija

Neka je $\varphi\colon R \to S$ homomorfizam prstena. Tada je slika

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(r)\colon r \in R\}$$

homomorfizma φ potprsten od S, a jezgra

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{r \in R\colon \varphi(r) = 0\}$$

homomorfizma φ potprsten od R.

Ako je R netrivijalan prsten s jedinicom 1_R i S netrivijalan prsten s jedinicom 1_S, onda se homomorfizam prstena $\varphi\colon R \to S$ zove unitalan ako je $\varphi(1_R) = 1_S$.

Neka je $\varphi\colon R \to S$ homomorfizam prstena. Ako prsten R ima jedinicu 1, $S \neq \{0\}$ i preslikavanje φ jest surjekcija, onda je $\varphi(1)$ jedinica od S.

Propozicija

Homomorfizam prstena $\varphi\colon R \to S$ monomorfizam je ako i samo ako je $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

Zadatak 1

Pokažite da je skup $n\mathbb{Z}$ za $n \in \mathbb{N}$, uz standardno zbrajanje i množenje definirano s

$$a * b = \frac{ab}{n},$$

prsten izomorfan prstenu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Zadatak 2

Dokažite da prsteni $2\mathbb{Z}$ i $3\mathbb{Z}$ nisu izomorfni.

Definicija

Karakteristika prstena R najmanji je prirodan broj n takav da je $nr = 0$, za sve $r \in R$, ukoliko takav n postoji. Ako ne postoji takav prirodan broj, kažemo da je R **prsten karakteristike** 0. Karakteristiku prstena R označavamo s char R.

Zadatak 3

Neka je p prost broj i R komutativan netrivijalan unitalni prsten karakteristike p. Pokažite da je preslikavanje

$$r \mapsto r^p$$

homomorfizam prstena R u R. To preslikavanje nazivamo Frobeniusov homomorfizam.

Zadatak 4

Dokažite da je prsten kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ izomorfan prstenu

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ideali

Definicija

Aditivna podgrupa I prstena R zove se **lijevi ideal u prstenu** R ako vrijedi

$$a \in I,\ \ r \in R \Rightarrow ra \in I,$$

a **desni ideal** ako vrijedi

$$a \in I,\ \ r \in R \Rightarrow ar \in I.$$

Ako je I i lijevi i desni ideal u prstenu R, nazivamo ga **ideal** ili **obostrani ideal u prstenu** R.

Napomena

U komutativnom je prstenu svaki ideal obostrani ideal.

Teorem

Neprazan podskup I prstena R jest ideal u R ako je

a) $a - b \in I$ za sve $a, b \in I$,

b) ra i ar su u I za sve $a \in I$ i $r \in R$.

Primjer

Za svaki prsten R su $\{0\}$ i R ideali u R. Ideal $\{0\}$ nazivamo trivijalan ideal u prstenu R.

Lema

Neka je R netrivijalan prsten s jedinicom 1 i I ideal u R. Tada je $1 \in I$ ako i samo ako je $R = I$.

Zadatak 1

Pokažite da je skup

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

prsten uz standardno zbrajanje i množenje matrica te ispitajte je li

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

ideal u R.

Napomena

Uočimo kako činjenica je li neki skup ideal ovisi i o prstenu u kojem ga promatramo. Pokažite za vježbu da I iz prethodnog zadatka nije ideal u prstenu $M(2, \mathbb{R})$.

Zadatak 2

Pokažite da je skup R svih donjetrokutastih matrica iz prstena $M(2,\mathbb{Z})$ prsten uz standardno zbrajanje i množenje matrica i ispitajte jesu li

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{Z} \right\} \text{ i } J = \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{Z} \right\}$$

ideali u prstenu R.

Zadatak 3

Ispitajte je li skup $I = \{(x-1)p(x) \colon p(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ ideal u komutativnom prstenu $(\mathbb{Q}[x], +, \cdot)$.

Neka je S neprazan podskup prstena R. Presjek svih ideala u R koji sadrže S naziva se ideal generiran skupom S i označava se sa (S).

Primjer

Neka je R komutativan netrivijalan unitalni prsten i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementi iz R. Tada je

$$I = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \{r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n : r_i \in R\}$$

ideal u R kojeg nazivamo <u>ideal generiran s $a_1, a_2, \ldots, a_n$</u>.

Definicija

Za ideal kažemo da je **glavni** ukoliko je generiran jednim elementom.

Definicija

Kažemo da je prsten R **prsten glavnih ideala** ukoliko je svaki ideal u R glavni. Ako je R i integralna domena, onda za R kažemo da je **domena glavnih ideala**.

Zadatak 4

Pokažite da je $\mathbb{Z}$ domena glavnih ideala.

Polja

Definicija

Tijelo ili **prsten s dijeljenjem** netrivijalan je unitalni prsten takav da je svaki element različit od nule invertibilan.

Definicija

Komutativno tijelo nazivamo **polje**.

Napomena

Svako je polje integralna domena.

Primjer

Skup $\mathbb{Z}$ nije polje.

Primjer

Skupovi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ jesu polja.

Teorem

Neka su a, b, c elementi integralne domene R. Ako je $a \neq 0$ i $ab = ac$, onda je $b = c$.

Zadatak 1

Dokažite da je svaka konačna integralna domena polje.