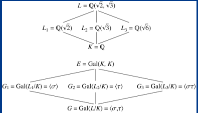

Algebra

Vježbe 9

3.5.2023.

predavač: prof.dr.sc. I.Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Kvocijentni prsteni

Neka je I ideal u prstenu R. Tada je skup

$$R/I = \{r + I \colon r \in R\}$$

uz operaciju $(a + I) + (b + I) = a + b + I$ za $a, b \in R$ kvocijentna grupa. Definirajmo operaciju množenja na R/I na sljedeći način:

$$(a + I)(b + I) = ab + I \ \text{ za } a, b \in R.$$

S tako definiranim operacijama, R/I prsten je kojeg nazivamo **kvocijentni prsten prstena R po idealu I**.

Nula u kvocijentnom prstenu R/I jest $0 + I = I$.

Napomena

Ako je R prsten s jedinicom 1 i $I \neq R$ ideal u R, onda je R/I prsten s jedinicom $1 + I$.

Zadatak 1

Neka je $I = (x^2 + 2x + 2)$ ideal u prstenu $\mathbb{Z}_5[x]$. Ispitajte je li $2x + 3 + I$ djelitelj nule u prstenu $\mathbb{Z}_5[x]/I$.

Zadatak 2

Neka je R prsten i I ideal u R. Dokažite da je kvocijentni prsten R/I komutativan ako i samo ako je $rs - sr \in I$ za sve $r, s \in R$. $\square$

Teorem

Neka je $\varphi\colon R \to S$ homomorfizam prstena.

a) Jezgra Ker $\varphi = I$ preslikavanja φ ideal je u prstenu R.

b) Preslikavanje $\Phi\colon R/I \to$ Im φ definirano s

$$\Phi(r+I) = \varphi(r) \ \text{za} \ r \in R$$

izomorfizam je kvocijentnog prstena na prsten Im φ.

Napomena

Dio b) prethodnog teorema naziva se **Prvi teorem o izomorfizmu za prstene**.

Zadatak 3

Dokažite da je kvocijentni prsten $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ izomorfan prstenu $\mathbb{C}$.

Zadatak 4

Neka je I skup svih polinoma iz $\mathbb{Z}[x]$ kojima je suma koeficijenata jednaka 0. Dokažite da je prsten $\mathbb{Z}[x]/I$ izomorfan prstenu $\mathbb{Z}$.

Prosti i maksimalni ideali

Neka je R u ovom odjeljku komutativan netrivijalan unitalni prsten.

Napomena

Ideal I u prstenu R pravi je ideal ako je $I \neq R$.

Definicija

Kažemo da je pravi ideal I u prstenu R **prost** ako iz $ab \in I$ slijedi da je ili $a \in I$ ili $b \in I$.

Definicija

Kažemo da je pravi ideal I u prstenu R **maksimalan** ako u R ne postoji ideal J takav da je $I \subsetneq J \subsetneq R$.

Primjer 2

Ideal (2) prost je i maksimalan ideal u $\mathbb{Z}$. Pokažite to za vježbu.

Primjer 4

Trivijalan ideal i $(p) = p\mathbb{Z}$, gdje je p prost broj, prosti su ideali u prstenu $\mathbb{Z}$. Ideal (p) i maksimalan je ideal u prstenu $\mathbb{Z}$.

Propozicija

Neka su R i S međusobno izomorfni netrivijalni komutativni unitalni prsteni.

a) Ako je R integralna domena, onda je i S integralna domena.

b) Ako je R polje, onda je i S polje.

Propozicija

Neka je I pravi ideal u R. Tada postoji maksimalan ideal u R koji sadrži ideal I.

Teorem

Ideal I u prstenu R prost je ako i samo ako je kvocijentni prsten R/I integralna domena.

Teorem

Ideal I u prstenu R maksimalan je ako i samo ako je kvocijentni prsten R/I polje.

Teorem

Svaki je maksimalan ideal I u R prost.

Zadatak 1

Ispitajte je li $(x^2 + 4)$ prost i maksimalan ideal u prstenu $\mathbb{C}[x]$.

Teorem

R je polje ako i samo ako ne postoji netrivijalan pravi ideal u R.

Propozicija

Neka je R domena glavnih ideala. Tada je svaki prost netrivijalan ideal u R maksimalan u R.

Zadatak 2

Ako je R konačan komutativan unitalni prsten, dokažite da je tada svaki prost ideal u R maksimalan ideal u R.

Zadatak 3

Dan je skup
$$I = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] \colon f(0) = 0\}.$$
Pokažite da je I ideal u $\mathbb{Z}[x]$. Nakon toga, dokažite da je I glavni ideal te da je I prost ideal u $\mathbb{Z}[x]$. $\square$

Zadatak 4

Dan je komutativan unitalni prsten $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ i homomorfizam prstena $\varphi \colon R \to \mathbb{Z}$ definiran s
$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \right) = a - b.$$
Odredite jezgru od φ te provjerite je li prsten $R/\operatorname{Ker}\varphi$ izomorfan prstenu $\mathbb{Z}$. Je li $\operatorname{Ker}\varphi$ prost ideal u R? Je li $\operatorname{Ker}\varphi$ maksimalan ideal u R? $\square$