Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**

2. veljače 2018.

2. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Hoće li se i kako promijeniti vrijednost determinante ako načinimo neku cikličku izmjenu njezinih stupaca – primjerice, ako determinantu* $\det[a_1, a_2, a_3]$ *promijenimo na sljedeći način:* $\det[a_2, a_3, a_1]$*? Navedite primjer.*

(b) *Hoće li se i kako promijeniti vrijednost determinante ako stupac* a_i *pomnožimo s* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i dodamo stupcu* a_j*, tj. u kakvoj su vezi* $\det[\cdots a_i \cdots a_j \cdots]$ *i* $\det[\cdots a_i \cdots \lambda a_i + a_j \cdots]$*? Navedite primjer.*

(c) *Čemu je jednaka determinanta donjetrokutaste, a čemu determinanta gornjetrokutaste matrice? Navedite primjer.*

Rješenje: *(a) Neće se promijeniti; (b) Neće se promijeniti; (c) Obje su jednake produktu njigovih elemenata na glavnoj dijagonalni.*

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Iskažite Cramerov teorem za rješavanje sustava linearnih jednadžbi* $Ax = b$*.*

(b) *Diskutirajte i riješite sustav linearnih jednadžbi u ovisnosti o parametru* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcl} (\lambda-3)x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ -2x_1 & + & \lambda x_2 & = & 1 \end{array}$$

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Za* $\lambda = 1$ *sustav ima bekonačno mnogo rješenja, za* $\lambda = 2$ *sustav nema rješenja, a za* $\lambda \notin \{1, 2\}$ *rješenje je* $x_1 = x_2 = \frac{1}{\lambda-2}$*.*

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Uz koje uvjete je provediva LU-dekompozicija kvadratne matrice* $A \in M_n$*?*

(b) *Zadan je sustav* $Ax = b$*, gdje je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$*. Ako je moguće, odredite LU-dekompoziciju matrice* A*. Riješite sustav* $Lz = b$ *i rješenje označite sa* $z^\star$ *te nakon toga riješite sustav* $Ux = z^\star$ *i rješenje označite s* $x^\star$*. Što predstavlja vektor* $x^\star$*?*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $z^\star = (1, 3)^T$, $x^\star = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$*.* $x^\star$ *je rješenje sustava* $Ax = b$*.*

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Za koja dva sustava linearnih jednadžbi kažemo da su ekvivalentni? Navedite osnovne Gaussove elementarne transformacije koje ne mijenjaju rješivost sustava.*

(b) *Gaussovom metodom pronađite opće rješenje sustava linearnih jednadžbi. Što je opće rješenje pripadnog homogenog sustava?*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Rješenje: (a) Vidi Nastavne materijale; (b) $x = x_0 + \lambda u$, gdje je $x_0 = (-1, 1, 0)^T$, $u = (1, -1, 1)^T$. Opće rješenje pripadnog homogenog sustava je $x_H = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Što je mješoviti produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$? Koje je njegovo geometrijsko značenje?

(b) Za tri vektora $\vec{a} = 4\vec{i} + 9\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + 7\vec{j}$ izračunajte $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ i $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$. Što primjećujete?

Rješenje: (a) Vidi Nastavne materijale; (b) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -9$ jer se radi o cikličkim promjenama.

Zadatak 6. [15 bodova]

(a) Kako se određuje udaljenost točke $Q = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ do ravnine $M\colon Ax + By + Cz + D = 0$?

(b) Napišite segmentni oblik jednadžbe ravnine $M\colon x + 2y - 2z - 1 = 0$ i odredite udaljenost točke $Q = (-1, -2, -5)$ do ravnine M.

Rješenje: (a) Vidi Nastavne materijale; (b) $\frac{x}{1} + \frac{y}{.5} + \frac{z}{-.5} = 1$, $d(Q, M) = \frac{4}{3}$.

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 115 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
2. veljače 2018.

2. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Hoće li se i kako promijeniti vrijednost determinante ako načinimo neku necikličku izmjenu njezinih stupaca – primjerice, ako determinantu* $\det[a_1, a_2, a_3]$ *promijenimo na sljedeći način:* $\det[a_2, a_1, a_3]$*? Navedite primjer.*

(b) *Kako se može napisati determinanta n-tog reda čiji je i-ti stupac* a_i *neka linearna kombinacija dva vektora* $a, b \in \mathbb{R}^n$*, tj. kako se može napisati* $\det[\cdots \lambda a + \mu b \cdots]$*? Navedite primjer.*

(c) *Hoće li se i kako promijeniti vrijednost determinante ako njezin i-ti stupac pomnožimo brojem* $\lambda \in \mathbb{R}$*, tj. u kakvoj su vezi* $\det A = \det[\cdots a_i \cdots]$ *i* $\det B = \det[\cdots \lambda a_i \cdots]$*? Navedite primjer.*

Rješenje: *(a) Promijenit će predznak; (b)* $\lambda \det[\cdots a \cdots] + \mu \det[\cdots b \cdots]$ *; (c)* $\det B = \lambda \det A$.

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Kako se definira minor (subdeterminanta), a kako kofaktor (algebarski komplement) elementa* a_{ik} *matrice* $A \in M_n$*? Napišite Laplaceov razvoj determinante matrice* $A \in M_n$ *po elementima i-tog retka.*

(b) *Diskutirajte i riješite sustav linearnih jednadžbi u ovisnosti o parametru* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcl} \lambda x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & = & 2 \end{array}$$

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Za* $\lambda = 1$*, sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Za* $\lambda = -1$*, sustav nema rješenja, a za* $\lambda \notin \{-1, 1\}$ *rješenje je* $x_1 = x_2 = \frac{2}{\lambda+1}$.

Zadatak 3. [15 bodova]

(a) *Iskažite Kronecker-Capellijev teorem.*

(b) *Primjenom Kronecker-Capellijevog teorema ispitajte rješivost sustava*

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & -x_2 & = & 2 \end{array}$$

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Sustav nije rješiv.*

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Kako se može zapisati opće rješenje nehomogenog sustava linearnih jednadžbi* $Ax = b$*?*

(b) Gaussovom metodom pronađite opće rješenje sustava linearnih jednadžbi. Što je opće rješenje pripadnog homogenog sustava?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}$$

Rješenje: (a) Vidi Nastavne materijale; (b) $x = x_0 + \lambda u$, gdje je $x_0 = (0, 1, 0)^T$, $u = (1, -2, 1)^T$. Opće rješenje pripadnog homogenog sustava je $x_H = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Kako se definira i koja svojstva ima vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$?

(b) Zadani su vektori $\vec{a} = \lambda\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k}$. Ako je moguće, odredite parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ budu kolinearni.

Rješenje: (a) Vidi Nastavne materijale; (b) $\lambda = -\frac{4}{3}$.

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) Kako se može definirati pravac u prostoru?.

(b) Pravac p određen je točkom $P_0 = (2, -1, 2)$ i vektorom $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$. Odredite udaljenost točke $Q = (-1, -1, 0)$ do pravca p i do normale na taj pravac u točki P_0.

Rješenje: (a) Vidi Nastavne materijale; (b) Projekcija vektora $\overrightarrow{P_0Q}$ na normalu n: $-\frac{5}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{k}$, $d(Q, p) = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Projekcija vektora $\overrightarrow{P_0Q}$ na pravac p: $-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}$, $d(Q, n) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 115 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju.