Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**

19. studenog 2019.

1. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Što znači da je skup vektora $S = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \subset X_0$ linearno zavisan ?*

(b) *Neka je $\vec{a} \in X_0(p)$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ nenul-vektor na pravcu p. Dokažite da se svaki $\vec{b} \in X_0(p)$ na jedinstven način može prikazati pomoću vektora $\vec{a}$.*

(c) *Može li se vektor $\vec{c} = 5\vec{j}$ prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{b} = 3\vec{j}$?*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali; (c) $\vec{c} = 0\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}$.*

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Kako se definira norma vektora u vektorskom prostoru X_0?*

(b) *Dokažite da je formulom $\|\vec{a}\|_1 = |a_1| + |a_2|$ definirana norma vektora u vektorskom prostoru $X_0(M)$.*

(c) *Neka su $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ dva vektora. Za koju normu $\|\cdot\|$ vrijedi $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$?*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (c) Nastavni materijali; (c) $\|\vec{a}\|_\infty = \|\vec{b}\|_\infty = 3$*

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Napišite Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjevu nejednakost za realne brojeve $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$. Kada vrijedi jednakost?*

(b) *Napišite istu nejednakost u vektorskom obliku. Uz koji uvjet vrijedi jednakost?*

(c) *Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Koristeći Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost dokažite da vrijedi:*

$$x + 2y + 3z \leq \sqrt{28}.$$

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali; (c) Uz oznake $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $b_1 = x$, $b_2 = y$, $b_3 = z$ iz CSB-nejednakosti slijedi traženo.*

Zadatak 4. [25 bodova]

(a) *Kako se pomoću tri linearno nezavisna vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mogu definirati ortonormirani vektori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$?*

(b) *Izrazite vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ pomoću vektora $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ i dokažite da u tom slučaju mora biti $\vec{b} \cdot \vec{v} > 0$ i $\vec{c} \cdot \vec{w} > 0$.*

(c) *Pravac p zadan je vektorom $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ i točkom $P_0 = (2, 1)$. Odredite euklidsku d_2 udaljenost točke $T = (1, 3)$ do pravca p i ortogonalnu projekciju točke T na pravac p.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b) Nastavni materijali;*
(c) $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$; $\vec{c} = \vec{r}_T - \vec{r}_{P_0} = -\vec{i} + 2\vec{j}$; $\overrightarrow{T'T} = \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$;
$d_2(T,p) = \|\overrightarrow{T'T}\| = \frac{3}{\sqrt{2}}$; $\vec{r}_{T_p} = \vec{r}_T - \overrightarrow{T'T} = \frac{5}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$; $T_p = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Za koju matricu kažemo da je regularna, a za koju da je singularna?

(b) Napišite sljedeće elementarne matrice drugog reda: $Q_1(\frac{1}{5})$, $Q_1(-3;2)$, $Q_2(5)$, $Q_2(-\frac{3}{5};1)$. *Odredite matricu* $B = T \cdot A$*, gdje je*

$$T = Q_1(\tfrac{1}{5}) \cdot Q_1(-3;2) \cdot Q_2(5) \cdot Q_2(-\tfrac{3}{5};1) \quad i \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Što u ovom slučaju predstavlja matrica T*?*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b)* $B = I$, $T = A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
19. studenog 2019.

1. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Što znači da je skup vektora $S = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\} \subset X_0$ linearno nezavisan ?*

(b) *Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ linearno nezavisni vektori u ravnini M. Dokažite da se svaki vektor $\vec{c} \in X_0(M)$ na jedinstven način može prikazati pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.*

(c) *Može li se vektor $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j}$ prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{j}$?*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali; (c) $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.*

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Kako se može definirati udaljenost dviju točaka $A = (x_1, \ldots, x_n)$ i $B = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$?*

(b) *Neka je $A = (1, 1)$ točka u ravnini. Odredite skup $S = \{X \in \mathbb{R}^2 \colon d_\infty(X, A) \leq 1\}$.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Kvadrat sa stranicom duljine 2 i središtem u točki A, tj. $S = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x - 1| \leq 1 \& |y - 1| \leq 1\}$.*

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Napišite Hölderovu nejednakost za realne brojeve $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$. Kada vrijedi jednakost?*

(b) *Napišite istu nejednakost u vektorskom obliku. Uz koji uvjet vrijedi jednakost?*

(c) *Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Koristeći Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost dokažite da vrijedi:*

$$5x + 2y + z \leq \sqrt{90}.$$

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali; (c) Uz oznake $a_1 = 5$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $b_1 = x$, $b_2 = y$, $b_3 = z$ iz CSB-nejednakosti slijedi traženo.*

Zadatak 4. [25 bodova]

(a) *Kako se pomoću dva linearno nezavisna vektora $\vec{a}, \vec{b}$ mogu definirati ortonormirani vektori $\vec{u}, \vec{v}$?*

(b) *Izrazite vektore $\vec{a}, \vec{b}$ pomoću vektora $\vec{u}, \vec{v}$ i dokažite da u tom slučaju mora biti $\vec{b} \cdot \vec{v} > 0$.*

(c) *Pravac p zadan je vektorom $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ i točkom $P_0 = (0, 1)$. Odredite euklidsku d_2 udaljenost točke $T = (3, 5)$ do pravca p i ortogonalnu projekciju točke T na pravac p.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali;*
(c) $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$; $\vec{c} = \vec{r}_T - \vec{r}_{P_0} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\overrightarrow{T'T} = \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$; $d_2(T, p) = \|\overrightarrow{T'T}\| = \sqrt{5}$; $\vec{r}_{T_p} = \vec{r}_T - \overrightarrow{T'T} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$; $T_p = (4, 3)$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Koje elementarne transformacije nad stupcima matrice poznajete?*

(b) *Napišite sljedeće elementarne matrice trećeg reda:* $Q_3(-3;2)$, $Q_3(-4;1)$, $Q_2(-2;1)$, $P_2(-\frac{1}{2})$. *Odredite matricu* T, *gdje je*

$$T = Q_3(-3;2) \cdot Q_3(-4;1) \cdot Q_2(-2;1) \cdot A \cdot P_2(-\tfrac{1}{2}), \quad i \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koje svojstvo ima matrica T*?*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b)* $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *– gornjetrokutasta matrica.*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju.