Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
28. siječnja 2020.

2. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Navedite barem tri osnovna svojstva determinante.*

(b) *Kolike su vrijednosti determinanti elementarnih matrica?*

(c) *Izračunajte vrijednost determinante matrice* $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & 8 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali; (c)* $\det A = 210$.

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Napišite Laplaceov razvoj determinante matrice* $A \in M_n$ *po elementima* i*-tog retka.*

(b) *U ovisnosti o parametru* $\lambda \in \mathbb{R}$ *diskutirajte sljedeći sustav linearnih jednadžbi:*

$$x_1 + \lambda x_2 = \lambda$$
$$\lambda x_1 + x_2 = \lambda$$

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b)* $D = 1 - \lambda^2$; $D_1 = \lambda - \lambda^2$; $D_2 = \lambda - \lambda^2$. *Ako je* $\lambda = 1$, $D = D_1 = D_2 = 0$ *— sustav je neodređen (rješenje ovisi o jednom parametru). Za* $\lambda = -1$ *sustav nema rješenja. Za* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ *sustav ima jedinstveno rješenje.*

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Što zovemo partikularnim, a što općim rješenjem nehomogenog sustava linearnih jednadžbi* $Ax = b$*?*

(b) *Gaussovom metodom eliminacije odredite opće rješenje sljedećeg sustava linearnih jednadžbi:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & + & 11x_5 & = & 7 \end{array}$$

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b)* $x = x_0 + pu_1 + qu_2 + ru_3$, *gdje je* $x_0 = (3, 0, 1, 0, 0)^T$, $u_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$, $u_2 = (-4, 0, 2, 1, 0)^T$, $u_3 = (-7, 0, 3, 0, 1)^T$, $p, q, r \in \mathbb{R}$.

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Kako se definira vektorski produkt dva vektora* $\vec{a}, \vec{b} \in X_0$*?*

(b) *Odredite vektorski produkt vektora* $\vec{a} = -5\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

(c) *Odredite vrijednost mješovitog produkta* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a})$ *za vektore* $\vec{a}, \vec{b}$ *navedene u (b) i objasnite njegovo geometrijsko značenje.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b)* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} = -12\vec{i} - 30\vec{k}$ *(c)* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) = 0$ *zbog komplanarnosti vektora.*

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Ako je $ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 = 1$ *normalna jednadžba pravca* p *u ravnini, napišite formulu za udaljenost točke* $Q = (x_Q, y_Q) \in \mathbb{R}^2$ *do pravca* p.

(b) Odredite udaljenost točke $Q = (2, 6)$ *do pravca* $3x + 4y - 5 = 0$.

Rješenje: (a) $d(Q,p) = |ax_Q + by_Q + c|$; *(b)* $n_0 = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j},\ d(Q,p) = 5$.

Zadatak 6. [15 bodova]

Ako je $P_0 \in \mathbb{R}^3$ *točka u ravnini* M, $\vec{n}_0$ *jedinični vektor normale na tu ravninu,* $Q \in \mathbb{R}^3$ *točka izvan ravnine i* $\vec{c} = \overrightarrow{P_0Q}$ *vektor, odredite*
(a) projekciju vektora $\vec{c}$ *na pravac određen s* $\vec{n}_0$;
(b) udaljenost točke Q *do ravnine* M.

Rješenje: (a) $(\vec{c} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0$; *(b)* $\|(\vec{c} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0\|$.

Zadatak 7. [15 bodova]

(a) Kako se definira Hesseov normalni oblik ravnine M *u prostoru?*
(b) Odredite udaljenost točke $Q = (x_Q, y_Q)$ *do ravnine* M *zadane u Hesseovom normalnom obliku.*

Rješenje: (a) Nastavni materijali; (b) $d(Q,p) = |x_Q \cos\alpha + y_Q \cos\beta + z_Q \cos\gamma - \delta|$, *gdje su* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *komponente jediničnog vektora normale* $\vec{n}_0$ *na ravninu* M, *a* $\delta = \vec{n}_0 \cdot \vec{r}_0$, *gdje je* $\vec{r}_0$ *radij-vektor proizvoljne točke* $P_0 \in M$.

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 130 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prvom kolokviju.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
28. siječnja 2020.

2. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Kako se definira determinanta matrice $A \in M_n$?*

(b) *Dokažite da je determinanta trokutaste matrice $A \in M_n$ jednaka produktu dijagonalnih elemenata.*

(c) *Izračunajte vrijednost determinante matrice* $A = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -2 & -2 \\ 7 & 7 & 7 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ -5 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Nastavni materijali; (c)* $\det A = 96$.

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Iskažite Cramerov teorem.*

(b) *U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ diskutirajte sljedeći sustav linearnih jednadžbi:*

$$\lambda x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = \lambda$$

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) $D = \lambda - 1$; $D_1 = 1 - \lambda$; $D_2 = -1 + \lambda^2$. Ako je $\lambda = 1$, $D = D_1 = D_2 = 0$ — suastav je neodređen (rješenje ovisi o jednom parametru). Za $\lambda \neq 1$ sustav ima jedinstveno rješenje.*

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Iskažite Kronecker-Capellijev teorem.*

(b) *Gaussovom metodom eliminacije odredite opće rješenje sljedećeg sustava linearnih jednadžbi:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \end{array}$$

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) $x = x_0 + pu_1 + qu_2$, gdje je $x_0 = (-2, 2, 0, 0)^T$, $u_1 = (-1, -1, 1, 0)^T$, $u_2 = (0, -2, 0, 1)^T$, $p, q \in \mathbb{R}$.*

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Ako je $\vec{u}$ jedinični vektor, a $\vec{b}$ vektor koji nije kolinearan s $\vec{u}$, objasnite geometrijsko značenje formule: $\vec{b} = (\vec{u} \cdot \vec{b})\vec{u} + \vec{u} \times (\vec{b} \times \vec{u})$*

(b) *Za vektore $\vec{u} = \vec{i}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ odredite vektore $(\vec{u} \cdot \vec{b})\vec{u}$ i $\vec{u} \times (\vec{b} \times \vec{u})$. Nacrtajte odgovarajuću sliku.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) $(\vec{u} \cdot \vec{b})\vec{u} = 2\vec{i}, \vec{u} \times (\vec{b} \times \vec{u}) = \vec{b} - (\vec{b}\vec{u})\vec{u} = \vec{j}$.*

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Ako je* $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 = 1$ *normalna jednadžba pravca* p *u ravnini, čemu je jednak radij-vektor* $\vec{r}_p$ *projekcije* Q_p *točke* Q *na pravac* p*?*

(b) *Odredite projekciju točke* $Q = (2, 6)$ *na pravac* $3x + 4y - 5 = 0$.

Rješenje: *(a)* $\vec{r}_p = (\vec{r} \cdot \vec{u}_0)\vec{u}_0 - c\vec{n}_0$, *gdje je* $\vec{n}_0$ *jedinični vektor normale,* $\vec{u}_0$ *jedinični vektor u smjeru pravca* p, *a* c *slobodni koeficijent normalne jednadžbe pravca;* *(b)* $n_0 = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$, $u_0 = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$, $c = -1$, $\vec{r}_p = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

Zadatak 6. [15 bodova]

Ako je $P_0 \in \mathbb{R}^3$ *točka u ravnini* M, $\vec{n}_0$ *jedinični vektor normale na tu ravninu,* $Q \in \mathbb{R}^3$ *točka izvan ravnine i* $\vec{c} = \overrightarrow{P_0Q}$, *odredite*
(a) *projekciju vektora* $\vec{c}$ *na ravninu* M*;*
(b) *udaljenost točke* Q *do normale određene s* $\vec{n}_0$.

Rješenje: *(a)* $\vec{n}_0 \times (\vec{c} \times \vec{n}_0)$; *(b)* $\|\vec{n}_0 \times (\vec{c} \times \vec{n}_0)\|$.

Zadatak 7. [15 bodova]

(a) *Kako se definira Hesseov normalni oblik pravca u ravnini?*
(b) *Za pravac* p *u ravnini zadan u normalnom obliku* $(p): ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 = 1$, $a \neq 0$, $c < 0$, *odredite udaljenost točke* $Q = (x_Q, y_Q)$ *do pravca* p.

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b)* $d(Q, p) = |x_Q \cos\alpha + y_Q \sin\alpha - \delta|$, *gdje je* $\alpha = \arctan\frac{b}{a}$ *i* $\delta = -c$.

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 130 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prvom kolokviju.