Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
1. prosinca 2020.

1. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Što znači da je skup vektora* $S = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \subset X_0$ *linearno nezavisan ?*

(b) *Jesu li vektori* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$, $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}$ *linearno nezavisni?*

(c) *Može li se vektor* $\vec{d} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ *prikazati kao linearna kombinacija vektora* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$*? Ako može, može li se to napraviti na jedinstven način ili na više načina?*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Nisu; (c) Može. 1:* $\vec{d} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$*;*
2: $\vec{d} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$*; 3:* $\vec{d} = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{6}{5}\vec{c}$*.*

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Kako se definira projekcija vektora* $\vec{b}$ *na pravac određen vektorom* $\vec{a}$*? Pokažite da za vektor* $\vec{b'} := \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\,\vec{u}$, $\vec{u} := \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, *vrijedi: (i)* $\vec{b'} \neq \vec{0}$, *(ii)* $\vec{b'} \perp \vec{u}$, *(iii)* $\vec{b'} \cdot \vec{b} > 0$.

(b) *Zadani su vektori:* $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$. *Odredite projekciju vektora* $\vec{b}$ *na pravac određen vektorom* $\vec{a}$ *i projekciju vektora* $\vec{a}$ *na pravac određen vektorom* $\vec{b}$.

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b)* $\vec{b}_a = 3\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{a}_b = \frac{6}{5}\vec{i} + \frac{12}{5}\vec{j}$.

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Kako se definira norma vektora u vektorskom prostoru* X_0*? Navedite barem jedan primjer najčešće korištene norme vektora.*

(b) *Nacrtajte skup* $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq \|x\|_2 \leq 4\}$.

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Kružni vijenac između kružnica* $x^2 + y^2 = 1$ *i* $x^2 + y^2 = 2^2$.

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Zadana su tri linearno nezavisna vektora* $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - \vec{j}$. *Gram-Schmidtovim postupkom pronađite odgovarajuće ortonormirane vektore* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

(b) *Odredite projekciju vektora* $\vec{d} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ *na ravninu određenu vektorima* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$.

Rješenje: *(a)* $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$, $\vec{w} = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{j} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{k}$;
(b) $(\vec{d} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{d} \cdot \vec{v})\vec{v} = \frac{5}{9}\vec{i} + \frac{2}{9}\vec{j} - \frac{13}{9}\vec{k}$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Kako se definira regularna a kako singularna matrica?*

(b) *Provjerite, koja od sljedeće dvije matrice je regularna i odredite njoj inverznu:*
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b)* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadatak 6. [15 bodova]

(a) *Navedite elementarne transformacije nad stupcima matrice A. Kako se realiziraju ove transformacije pomoću elementarnih matrica?*

(b) *Odredite inverzne matrice matrica elementarnih transformacija drugog reda P_{12}, $P_2(\lambda)$.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b)* $P_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = P_{12}$, $P_2^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix} = P_2(1/\lambda)$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 115 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju.