Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
27. siječnja 2021.

2. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) *Završite započete rečenice:*
Determinanta trokutaste matrice $A \in M_n$ jednaka je ...
Ako dva retka determinante zamijene mjesta, ...
Ako matrica $A \in M_n$ ima dva jednaka stupca, njena determinanta ...
Ako je stupac a_j matrice $A \in M_n$ linearna kombinacija nekih vektora stupaca $b, c \in M_{n1}$, ...
Determinanta se množi brojem λ tako da ...
Ako nekom retku determinante dodamo linearnu kombinaciju ostalih redaka, ...
Ako i-tom stupcu determinante dodamo j-ti stupac prethodno pomnožen brojem λ, ...
Uz uvjet __________ vrijednost Vandermondove determinante $V(x_1, \ldots, x_n)$ jednaka je ...

(b) *Odredite vrijednost determinante matrice* $A \in M_n$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ & & & \cdots & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b)* $1 - n$;

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Završite započete formule:*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} = \ldots$$
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det A_{kj} = \ldots$$
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{s+k} a_{rk} \det A_{sk} = \ldots$$

(b) *Diskutirajte i riješite sustav linearnih jednadžbi u ovisnosti o parametru* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & \lambda \\ x_1 & + & \lambda x_2 & = & \lambda \end{array}$$

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b)* $D = \lambda - 2$, $D_1 = \lambda^2 - 2\lambda$, $D_2 = 0$. *Za* $\lambda = 2$ *sustav ima bekonačno mnogo rješenja, a za* $\lambda \neq 2$ *sustav ima jedinstveno rješenje* $x_1 = \lambda$, $x_2 = 0$.

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Iskažite Kronecker-Capellijev teorem.*

(b) *Gaussovom metodom pronađite opće rješenje sljedećeg sustava linearnih jednadžbi. Što je opće rješenje pripadnog homogenog sustava?*

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & -x_3 & +x_4 & = 2 \\ -x_1 & +x_2 & & & = 2 \\ -2x_1 & & +2x_3 & -2x_4 & = -4 \end{array}$$

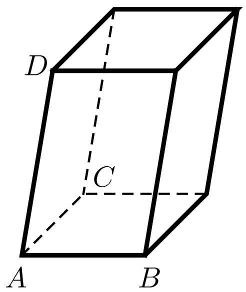
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale;* *(b)* $x = x_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, *gdje je* $x_0 = [2, 4, 0, 0]^T$, $u_1 = [1, 1, 1, 0]^T$, $u_2 = [-1, -1, 0, 1]^T$. *Opće rješenje pripadnog homogenog sustava je* $x_H = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Kako se definira i koja svojstva ima vektorski produkt* $\vec{a} \times \vec{b}$? *Ako je* $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$, *izračunajte* $\vec{a} \times \vec{b}$.

(b) *Paralelepiped je zadan svojim vrhovima* $A = (1, 1, 0)$, $B = (5, 1, 0)$, $C = (3, 3, 0)$, $D = (2, 2, 4)$ *(vidi sliku). Odredite volumen paralelepipeda.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale.* $\vec{a} \times \vec{b} = -2\vec{i} - 8\vec{j} - 2\vec{k}$; *(b)* $\vec{a} = 4\vec{i}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $V = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 32$



Zadatak 5. [25 bodova]

(a) *Kako se može definirati pravac u prostoru? Napišite parametarski oblik jednadžbe pravca u prostoru.*

(b) *Pravac* p *određen je s dvije točke* $P_1 = (2, 2, 4)$, $P_2 = (4, 3, 2)$. *Odredite udaljenost točke* $Q = (1, -2, -2)$ *do pravca* p.

(c) *Odredite projekciju točke* Q *na pravac* p.

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b)* $P_0 = P_1$, $u = (P_2 - P_1)/\|P_2 - P_1\| = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$; $\vec{c} = \overrightarrow{P_0 Q} = -\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{c} \times \vec{u} = \frac{14}{3}\vec{i} - \frac{14}{3}\vec{j} + \frac{7}{3}\vec{k}$, $d = 7$; *(c)* $(\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} = \frac{4}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{4}{3}\vec{k}$, $\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_0 + (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} = \frac{10}{3}\vec{i} + \frac{8}{3}\vec{j} + \frac{8}{3}\vec{k}$, $Q' = (\frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3})$.

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju.