Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
29. studenog 2021.

1. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [15 bodova] *Dan je trokut* $\triangle ABC$ *čiji vrhovi ne leže na jednom pravcu. Neka je* E *točka na dužini* $\overline{AB}$ *za koju vrijedi* $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$*, a* F *točka na dužini* $\overline{BC}$ *za koju vrijedi* $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$*. Vektorskim računom odredite* $\lambda \in \mathbb{R}$ *za kojeg vrijedi*

$$\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{AC}.$$

Zadatak 2. [15 bodova] *Neka su* x, y, z *realni brojevi takvi da je* $x-y-z=3$*. Primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti pokažite da vrijedi:*

$$1 \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{3}.$$

Zadatak 3. [10+15 bodova]

a) *Zadani su vektori* $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ *i* $\vec{b} = -4\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$*. Za koju normu* $\|\cdot\|$*, ukoliko takva postoji, vrijedi* $\|\vec{a}\| = \frac{1}{2}\|\vec{b}\|$*?*

b) *Vektor* $\vec{a}$ *okomit je na vektor* $-2\vec{a} + \vec{b}$*, a vektor* $2\vec{a} - \vec{b}$ *okomit je na vektor* $3\vec{a} + \vec{b}$*. Odredite kut između vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*.*

Zadatak 4. [25 bodova] *Čine li vektori* $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$*,* $\vec{b} = -3\vec{i} - 3\vec{k}$ *i* $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$ *bazu u* $X_0(E)$*? Ukoliko čine, Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije sagradite ortonormiranu bazu* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *te vektor* $\vec{d} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$ *prikažite u ortonormiranoj bazi* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$*.*

Zadatak 5. [10 + 10 bodova]

Dane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) *Ukoliko je moguće, izračunajte* $A \cdot B^T$ *i* $A^T \cdot B$*, a ako nije moguće, obrazložite zašto nije moguće.*

b) *Ispitajte komutiraju li matrice* D *i* $2C$*.*