Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
2. prosinca 2022.

1. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [15 bodova] *Neka je E točka na stranici $\overline{AD}$ i F točka na dijagonali $\overline{AC}$ paralelograma $ABCD$. Ako vrijedi da je $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, vektorskim računom odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ za kojeg je $\overrightarrow{EF} = \lambda\overrightarrow{EB}$.*

Zadatak 2. [15 bodova] *Neka su x, y, z realni brojevi. Primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti pokažite da vrijedi:*

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right)^2 \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{6}z^2.$$

Zadatak 3. [15 + 15 bodova]

a) Dani su vektori $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. Odredite vektor $\vec{x}$ koji je okomit na vektore $\vec{b}$ i $\vec{c}$ te vrijedi $\vec{a} \cdot \vec{x} = 1$. Izračunajte $\|\vec{x}\|_1$ i $\|\vec{x}\|_\infty$.

b) Dan je trokut $\triangle ABC$ s vrhovima $A = (1, 3, 1)$, $B = (1, 3, 2)$ i $C = (-2, 3, -1)$. Odredite unutrašnji kut trokuta pridružen vrhu B.

Zadatak 4. [5 + 15 bodova]

a) Čine li vektori $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ bazu u $X_0(E)$?

b) U ravnini M odabrana je fiksna točka O i vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ koji čine bazu u $X_0(M)$. Odredite ortogonalnu projekciju radijvektora točke $C = (3, 0, 3)$ na ravninu M.

Zadatak 5. [10 + 10 bodova]

Dane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

a) Ukoliko je moguće izračunajte $A^T \cdot B^T$ i $A^T \cdot B$, a ako nije, obrazložite zašto nije moguće.

b) Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ za kojeg matrice C i D komutiraju.