Linearna algebra I [1]

prof. dr. sc. Rudolf Scitovski, izv. prof. dr. sc. Darija Marković
dr. sc. Darija Brajković[2]

24. studenoga 2020.

[1] Obvezni predmet u 1. semestru sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i računarstvo (30 sati predavanja i 30 sati vježbi, 6 ECTS bodova)

[2] scitowsk@mathos.hr, darija@mathos.hr, dbrajkovic@mathos.hr

Sadržaj predmeta:

1. Pojam polja i vektorskog prostora. Primjeri vektorskih prostora, vektori u ravnini i prostoru, norma i skalarni produkt vektora u ravnini i prostoru. Linearna zavisnost i nezavisnost vektora.

2. Pojam matrice i operacije s matricama. Regularne matrice. Determinanta. Lijeve i desne baze i koordinatni sustavi. Vektorski i mješoviti produkt vektora. Elementarne transformacije. Adjunkta. Rang matrice.

3. Sustavi linearnih jednadžbi. Rješivost i struktura skupa rješenja. Jednadžba pravca i ravnine u prostoru. Kronecker-Capellijev teorem. Homogeni sustavi linearnih jednadžbi. Partikularno rješenje. Gaussova metoda eliminacije. Cramerovo pravilo.

Sadržaj

Poglavlje 3

Determinanta matrice

3.1 Uvod i motivacija

Promatrajmo sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Koeficijente uz nepoznanice a_{ij} možemo zapisati u obliku tablice, koju nazivamo **matrica sustava** – u ovom slučaju matrica drugog reda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Primijetite da prvi indeks i koeficijenta a_{ij} označava redak matrice (redni broj jednadžbe), a drugi indeks j označava stupac matrice (redni broj nepoznanice) u kome se element nalazi.

Sustav ćemo riješiti metodom suprotnih koeficijenata. Množeći prvu jednadžbu sustava (3.1) brojem a_{22}, a drugu brojem $(-a_{12})$, nakon zbrajanja tako pomnoženih jednadžbi dobivamo

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\, x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{3.2}$$

Ako sada proizvoljnoj matrici A pridružimo broj $\det A$ na sljedeći način

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \tag{3.3}$$

onda (3.2) možemo zapisati

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \text{odnosno} \quad Dx_1 = D_1, \tag{3.4}$$

pri čemu broj $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ zovemo **determinanta sustava**. Pokušajte sami slično dobiti da je

$$Dx_2 = D_2 \qquad \text{gdje je} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \tag{3.5}$$

Uređen par $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ je rješenje sustava (3.1). Iz (3.4) i (3.5) možemo zaključiti:

- ako je $D \neq 0$, sustav (3.1) ima jedinstveno rješenje
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}; \tag{3.6}$$
- ako je $D = 0$ i $D_1 = D_2 = 0$, sustav je rješiv i ima beskonačno mnogo rješenja;
- ako je $D = 0$, a pri tome barem jedan od brojeva D_1, D_2 različit od nule, sustav nema rješenja.

Zadatak 3.1. Prethodno navedene tvrdnje u literaturi su poznate kao **Cramerovo pravilo**. Pokušajte dati njihovu geometrijsku interpretaciju. Sve ilustrirajte primjerima.

Primjer 3.1. *Primjenom Cramerovog pravila diskutirat ćemo sljedeći sustav jednadžbi u ovisnosti o parametru* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 3x_1 + \lambda x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Dobivamo

$$D = \lambda^2 - 9, \quad D_1 = \lambda - 3, \quad D_2 = \lambda - 3.$$

Prema Cramerovom pravilu sustav ima jedinstveno rješenje $x_1 = x_2 = \frac{1}{\lambda+3}$ za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, za $\lambda = 3$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja koja leže na pravcu $3x_1 + 3x_2 = 1$, a za $\lambda = -3$ sustav nema rješenja.

* * * * *

Pod determinantom matrice drugog reda možemo podrazumijevati funkciju koja svakoj kvadratnoj matrici A drugog reda pridružuje realan broj $\det A$ definiran s (3.3). Uobičajeno je da se i vrijednost te funkcije također naziva determinanta matrice.

Funkciju $A \mapsto \det A$ definirat ćemo induktivno:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$\dots$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

gdje je A_{1k} kvadratna matrica $(n-1)$-og reda koja se dobiva iz matrice A ispuštanjem prvog retka i k-tog stupca. Posebno za $A = [a]$ definiramo $\det A = a$.

Primjer 3.2. *Na osnovi prethodne definicije dobivamo*

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -90.$$

3.2 Svojstva determinanti

Navedimo osnovna svojstva determinante koja će nam poslužiti u teorijske svrhe, ali i kod praktičnog izračunavanja. Prilikom dokazivanja većine pravila koristit ćemo princip matematičke indukcije. To znači da pravilo najprije treba dokazati za determinantu nižeg (primjerice drugog) reda. Nakon toga uz pretpostavku da pravilo vrijedi za determinantu $(n-1)$-og reda, pravilo ćemo dokazati za determinantu n-tog reda.

Pravilo 1. *Ako svi elementi nekog stupca matrice* $A = [a_1, \ldots, a_n] \in M_n$ *iščezavaju, onda je* $\det A = 0$.

Dokaz. Tvrdnja se lako dokaže za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skup matrica M_{n-1}.

Dokažimo tvrdnju za matricu $A \in M_n$. Pretpostavimo da r-ti stupac matrice A iščezava, tj. $a_r = [a_{1r}, \ldots, a_{nr}]^T = 0$. Tada suma $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k}$ iz (3.7) iščezava jer je $a_{1r} = 0$, a sve submatrice A_{1k}, $k \neq r$, imaju jedan nul-stupac pa po induktivnoj pretpostavci njihove determinante iščezavaju. Dakle, $\det A = 0$ □

Primjer 3.3. *Na osnovi definicije provjerite da je* $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

Pravilo 2. *Determinanta trokutaste matrice* $A \in M_n$ *jednaka je produktu dijagonalnih elemenata, tj.* $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$.

Dokaz. Tvrdnja se lako dokaže za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skup trokutastih matrica M_{n-1}.

Dokažimo tvrdnju za trokutastu matricu $A \in M_n$. Ako je A donjetrokutasta matrica, onda prema (3.7) vrijedi $\det A = a_{11} \det A_{11}$, a kako je $\det A_{11}$ donjetrokutasta determinanta $(n-1)$-og reda, tvrdnja je dokazana.

Ako je A gornjetrokutasta, onda prema Pravilu 1 vrijedi $\det A_{12} = \cdots = \det A_{1n} = 0$ pa je

$$\det A = a_{11} \det A_{11}.$$

Kako je $\det A_{11}$ determinanta gornjetrokutaste matrice $(n-1)$-og reda, po induktivnoj pretpostavci je

$$\det A_{11} = a_{22} \cdots a_{nn},$$

što zajedno s prethodnom jednakošću daje traženu formulu. □

Primjer 3.4. *Vrijedi li:*

$$\det I = 1;$$
$$\det P_{ij} = -1, \qquad \det P_{ij}^T = -1;$$
$$\det P_i(\lambda) = \lambda, \qquad \det P_i^T(\lambda) = \lambda;$$
$$\det P_i(\lambda; j) = 1, \qquad \det P_i^T(\lambda; j) = 1.$$

Pravilo 3. *Ako dva stupca determinante zamijene mjesta, determinanta mijenja predznak, tj. ako r-ti i s-ti stupac zamijene mjesta, vrijedi*

$$\det(AP_{rs}) = -\det A. \tag{3.8}$$

Dokaz. Tvrdnja se lako dokaže za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skup matrica M_{n-1}.

Dokažimo tvrdnju za matricu $A \in M_n$.

Najprije ćemo razmotriti slučaj zamjene dva susjedna stupca a_r, a_{r+1} matrice A. Neka je

$$B = AP_{r,r+1} = [\cdots a_{r+1}, a_r \cdots]$$

Elementi prvog retka nove matrice B su

$$b_{1r} = a_{1,r+1}, \quad b_{1,r+1} = a_{1r}, \qquad b_{1j} = a_{1j} \quad \text{za } j \notin \{r, r+1\}.$$

Pripadne submatrice elemenata b_{1r} i $b_{1,r+1}$ su:

$$B_{1r} = A_{1,r+1}, \quad B_{1,r+1} = A_{1r},$$

a njihove determinante

$$\det B_{1r} = \det A_{1,r+1}, \quad \det B_{1,r+1} = \det A_{1r}.$$

Za $j \notin \{r, r+1\}$ submatrica $B_{1j} \in M_{n-1}$ se od submatrice $A_{1j} \in M_{n-1}$ razlikuje u elementima dva susjedna stupca pa po pretpostavci indukcije vrijedi

$$\det B_{1j} = -\det A_{1j} \quad \text{za } j \notin \{r, r+1\}.$$

Zato prema (3.7) vrijedi

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} b_{1k} \det B_{1k} \\
&= \sum_{k\neq r,r+1}^{n} (-1)^{k-1} b_{1k} \det B_{1k} + (-1)^{r-1} b_{1r} \det B_{1r} + (-1)^{r} b_{1,r+1} \det B_{1,r+1} \\
&= -\sum_{k\neq r,r+1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k} + (-1)^{r-1} a_{1,r+1} \det A_{1,r+1} + (-1)^{r} a_{1r} \det A_{1r} \\
&= -\sum_{k\neq r,r+1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k} - (-1)^{r-1} a_{1r} \det A_{1r} - (-1)^{r} a_{1,r+1} \det A_{1,r+1} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k} = -\det A
\end{aligned}$$

Razmotrimo nadalje slučaj zamjene stupca a_r i a_{r+2} matrice A

$$B = AP_{r,r+2} = [\cdots a_{r+2}, a_{r+1}, a_r \cdots].$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\det(AP_{r,r+2}) &= \det[\cdots a_{r+2}, a_{r+1}, a_r \cdots] = (-1)^1[\cdots a_{r+2}, a_r, a_{r+1}, \cdots] \\
&= (-1)^2[\cdots a_r, a_{r+2}, a_{r+1}, \cdots] = (-1)^3[\cdots a_r, a_{r+1}, a_{r+2} \cdots] \\
&= -\det A.
\end{aligned}$$

Primijetite da je u ovom slučaju između stupaca koji se zamjenjuju nalazio jedan stupac i da je bilo potrebno provesti $3 = 2 \cdot 1 + 1$ sukcesivnih zamjena.

Ako bi se između stupaca koji se zamjenjuju $\{a_r, a_{r+3}\}$ nalazila dva stupca

$$B = AP_{r,r+3} = [\cdots a_{r+3}, a_{r+1}, a_{r+2}, a_r \cdots],$$

bilo bi potrebno provesti $5 = 2 \cdot 2 + 1$ zamjena pa bismo opet imali traženi rezultat.

Općenito, u slučaju ako se između stupaca koji se zamjenjuju nalazi p stupaca, bilo bi potrebno provesti $2p + 1$ zamjena i opet bismo imali traženi rezultat. $\square$

Primjer 3.5. *Provjerite da vrijedi*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Primjer 3.6. *Budući da se matrica P_{ij} dobije od jedinične matrice I zamjenom i-tog i j-tog stupca, $detP_{ij} = -1$. Budući da se matrica AP_{ij} dobiva od matrice A zamjenom i-tog i j-tog stupca, vrijedi $\det(AP_{ij}) = -\det A$. Zato formalno možemo pisati*

$$\det(AP_{ij}) = \det A \cdot \det P_{ij},$$

što znači da je u ovom slučaju determinanta produkta jednaka produktu determinanti!

Pravilo 4. *Ako matrica $A \in M_n$ ima dva jednaka stupca, njena determinanta iščezava, tj.* $\det A = 0$.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju za matricu $A \in M_n$. Pretpostavimo da su r-ti i s-ti stupac matrice A jednaki. Tada je $A = AP_{rs}$, što prema Pravilu 3 povlači

$$\det A = \det(AP_{rs}) = -\det A \quad \Rightarrow \quad \det A = 0.$$

□

Primjer 3.7. *Na osnovi definicije provjerite da vrijedi* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_1 \\ c_1 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} = 0.$

Pravilo 5. *Ako je stupac a_j matrice $A \in M_n$ linearna kombinacija nekih vektora stupaca $b, c \in M_{n1}$, vrijedi svojstvo linearnosti determinante:*

$$\det A = \det[\cdots \lambda b + \mu c \cdots] = \lambda \det[\cdots b \cdots] + \mu \det[\cdots c \cdots]. \tag{3.9}$$

Dokaz. Tvrdnja se lako dokaže za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skup matrica M_{n-1}.

Dokažimo tvrdnju za matricu $A \in M_n$. Bez smanjenja općenitosti (temeljem Pravila 3) pretpostavimo da je prvi stupac a_1 linearna kombinacija vektora $b, c \in M_{n1}$. Naime, u tom bi slučaju vrijedilo

$$\begin{vmatrix} \lambda b_1 + \mu c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda b_2 + \mu c_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda b_n + \mu c_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ako bi primjerice, treci stupac bio $a_3 = \lambda b + \mu c$, onda bi primjednom Pravila 3 lako pokazali da vrijedi Pravilo 5 i za treći stupac:

$$\begin{aligned} \det A &= -det[a_3\, a_2\, a_1\, a_4 \cdots] = -det[\lambda b + \mu c\, a_2\, a_1\, a_4 \cdots] \\ &= -\lambda\, det[b\, a_2\, a_1\, a_4 \cdots] - \mu\, det[c\, a_2\, a_1\, a_4 \cdots] \\ &= \lambda\, det[a_1\, a_2\, b\, a_4 \cdots] + \mu\, det[a_1\, a_2\, c\, a_4 \cdots]. \end{aligned}$$

Dokažimo zato Pravilo 5 za prvi stupac a_1. S $\tilde{a}_k$ ($k \geq 2$), označimo k-ti stupac matrice A kome je ispušten prvi element. Slično označimo i $\tilde{b}, \tilde{c}$. Razvojem determinante $\det A$ po elementima prvog retka (definicija (3.7)!)

$$\begin{aligned} \det A &= (\lambda b_1 + \mu c_1) \det[\tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_n] \\ &+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \begin{vmatrix} \lambda b_2 + \mu c_2 & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda b_n + \mu c_n & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Kako prema induktivnoj pretpostavci determinantu $(n-1)$-og reda u prethodnoj sumi možemo pisati kao

$$\lambda \det[\tilde{b} \cdots \tilde{a}_{k-1} \tilde{a}_{k+1} \cdots \tilde{a}_n] + \mu \det[\tilde{c} \cdots \tilde{a}_{k-1} \tilde{a}_{k+1} \cdots \tilde{a}_n],$$

imamo

$$
\begin{aligned}
\det A =& (\lambda b_1 + \mu c_1) \det[\tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_n] \\
&+\lambda \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det[\tilde{b} \cdots \tilde{a}_{k-1} \tilde{a}_{k+1} \cdots] + \mu \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det[\tilde{c} \cdots \tilde{a}_{k-1} \tilde{a}_{k+1} \cdots] \\
&=\lambda \Big(b_1 \det[\tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_n] + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det[\tilde{b} \cdots \tilde{a}_{k-1} \tilde{a}_{k+1} \cdots] \Big) \\
&+\mu \Big(c_1 \det[\tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_n] + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det[\tilde{c} \cdots \tilde{a}_{k-1} \tilde{a}_{k+1} \cdots] \Big) \\
&= \lambda \det[b, a_2 \cdots a_n] + \mu \det[c, a_2 \cdots a_n].
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 3.2. Korištenjem Pravila 5 pokažite da je $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda+1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda$.

Korolar 3.1. *Lako se vidi da vrijedi poopćenje Pravila 5 za slučaj kada je neki stupac linearna kombinacija r stupaca iz M_{n1}:*

$$\det[\cdots \sum_{k=1}^{r} \lambda_k b_k \cdots] = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \det[\cdots b_k \cdots].$$

Kao specijalni slučaj Pravila 5 dobivamo sljedeće pravilo za množenje determinante brojem.

Korolar 3.2. *Determinanta se množi brojem λ tako da bilo koji njezin stupac pomnožimo brojem λ.*

Dokaz.

$$\det[\cdots \lambda a_j \cdots] \stackrel{P5}{=} \lambda \det[\cdots a_j \cdots] = \lambda \det A.$$

□

Primjer 3.8. *Prema Primjeru 3.4, str.5,* $\det P_j(\lambda)) = \lambda$. *Budući da se matrica $AP_j(\lambda)$ dobiva od matrice A množenjem j-tog stupca s λ, vrijedi* $\det(AP_i(\lambda)) = \lambda \det A$. *Zato formalno možemo pisati*

$$\det(AP_i(\lambda)) = \det A \cdot \det P_i(\lambda),$$

što znači da je i u ovom slučaju determinanta produkta jednaka produktu determinanti!

Pravilo 6. *Ako nekom stupcu determinante dodamo linearnu kombinaciju ostalih stupaca, determinanta ne mijenja vrijednost.*

Dokaz. Tvrdnja se lako dokaže za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skup matrica M_{n-1}.

Dokažimo tvrdnju za matricu $A \in M_n$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da smo prvom stupcu a_1 dodali linearnu kombinaciju ostalih stupaca. Tada korištenjem Pravila 5 i Pravila 4 dobivamo

$$\det[a_1+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k a_k, a_2\cdots a_n] \stackrel{P5}{=} \det[a_1, a_2\cdots a_n]+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k \det[a_k, a_2\cdots a_n] \stackrel{(P4)}{=} \det A.$$

□

Korolar 3.3. *Ako i-tom stupcu determinante dodamo j-ti stupac prethodno pomnožen brojem λ, determinanta ne mijenja vrijednost, tj.*

Dokaz.

$$\det[\cdots a_r+\lambda a_s\cdots a_s\cdots] \stackrel{P5}{=} \det[\cdots a_r\cdots a_s\cdots]+\lambda\det[\cdots a_s\cdots a_s\cdots] = \det A.$$

□

Primjer 3.9. *Prema Primjeru 3.4, str.5, vrijedi* $\det P_i(\lambda; j) = 1$. *Budući da se matrica $AP_i(\lambda; j)$ dobiva od matrice A tako da i-tom stupcu dodamo j-ti stupac prethodno pomnožen brojem λ, prema Korolaru 3.3 vrijedi* $\det(AP_i(\lambda; j)) = \det A$. *Zato formalno možemo pisati*

$$\det(AP_i(\lambda; j)) = \det A \cdot \det P_i(\lambda; j),$$

što znači da je i u ovom slučaju determinanta produkta jednaka produktu determinanti!

Zadatak 3.3. U cilju određivanja vrijednosti determinante iz Primjera 3.2, korištenjem Korolara 3.3 matricu svedite na donjetrokutastu i primijenite Pravilo 2.

Pravilo 7. *Ako je neki stupac determinante linearna kombinacija ostalih stupaca, vrijednost determinante jednaka je nuli.*

Dokaz. Tvrdnja se lako dokaže za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skup matrica M_{n-1}.

Dokažimo tvrdnju za matricu $A \in M_n$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a_1 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k a_k$. Korištenjem Korolara 3.1 i Pravila 4 dobivamo:

$$\det[a_1 \cdots a_n] = \det[\sum_{k=2}^{n} \lambda_k a_k, a_2 \cdots a_n] \overset{Cor\ 3.1}{=} \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \det[a_k, a_2 \cdots a_n] \overset{Pr}{=} 0.$$

□

Pravilo 8. *Ako je A singularna matrica, onda je $\det A = 0$ i $\det A^T = 0$.*

Dokaz. Ako je A singularna matrica, njeni stupci su linearno zavisni pa je prema Pravilu 7 $\det A = 0$. Također, i retci matrice A (stupci matrice A^T) su linearno zavisni pa je $\det A^T = 0$. □

3.3 Binet-Cauchyjev teorem

Teorem 3.1. (Binet-Cauchy)
Za bilo koje dvije matrice $A, B \in M_n$ vrijedi

$$\det(A\,B) = \det A \cdot \det B.$$

Dokaz. Ako je jedna od matrica $A, B \in M_n$ singularna, tvrdnja vrijedi. Primjerice, ako je B singularna matrica, onda je i $A \cdot B$ singularna, pa je $\det B = 0$ i $\det(A \cdot B) = 0$. Dakle, tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo da je B regularna. Na osnovi Primjera 3.6, 3.8, 3.9 zaključujemo da za svaku matricu $A \in M_n$ i za svaku elementarnu P-matricu, $P \in M_n$, vrijedi

$$\det(A\,P) = \det A \cdot \det P. \tag{3.10}$$

Prema Korolaru **??** postoje elementarne P-matrice $P_1, \ldots, P_r$ takve da je $B = P_1 \cdots P_r$. Zato prema (3.10) dobivamo

$$\begin{aligned}
\det B &= \det(P_1 \cdots P_{r-1}) \cdot \det P_r, \\
&\cdots \\
\det B &= \det P_1 \cdots \det P_{r-1} \cdot \det P_r.
\end{aligned}$$

Također prema (3.10) dobivamo

$$\begin{aligned}
\det(A \cdot B) &= \det(A \cdot P_1 \cdots P_{r-1}) \cdot \det P_r, \\
&\cdots \\
\det(A \cdot B) &= \det A \cdot \det P_1 \cdots \det P_{r-1} \cdot \det P_r, \\
&= \det A \cdot \det B.
\end{aligned}$$

□

Teorem 3.2. *Za svaku matricu $A \in M_n$ vrijedi*

$$\det A^T = \det A. \tag{3.11}$$

Dokaz. Tvrdnja očigledno vrijedi za svaku singularnu i svaku simetričnu matricu, pa tako i za elementarne matrice P_{ij} i $P_i(\lambda)$. Tvrdnja vrijedi i za elementarnu matricu $P_i(\lambda; j)$ jer je prema Primjeru 3.9 $\det P_i(\lambda; j) = 1$ i $\det P_i^T(\lambda; j) = 1$. Zato tvrdnja vrijedi za svaku elementarnu P-matricu.

Pretpostavimo da je A regularna matrica. Prema Korolaru **??** postoje elementarne P-matrice $P_1, \ldots, P_r$ takve da je $A = P_1 \cdots P_r$, odnosno $A^T = P_r^T \cdots P_1^T$. Na osnovi Teorema 3.1 dobivamo

$$\det A^T = \det P_r^T \cdots \det P_1^T = \det P_r \cdots \det P_1 = \det(P_1 \cdots P_r) = \det A.$$

□

Primjedba 3.1. *Prethodno dokazani Teorem 3.2 pokazuje da sva pravila kod izračunavanja determinanti koja vrijede za stupce matrice A, vrijede i za njezine retke.*

3.4 Izračunavanje vrijednosti determinante

Primjer 3.10. *Promatramo problem polinomijalne interpolacije skupa podataka* (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ *(vidi primjerice [1][str. 287], [2][str. 19]). Uz pretpostavku*

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n \tag{3.12}$$

treba odrediti koeficijente polinoma $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ *tako da bude*

$$P_{n-1}(x_i) = y_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Geometrijski, to znači da treba pronaći polinom P_{n-1} *čiji graf prolazi točkama* $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$. *Koeficijente polinoma* P_{n-1} *mogli bi odrediti iz uvjeta* (3.13) *rješavajući sustav od* n *jednadžbi s* n *nepoznanica:*

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2 \\ \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n \end{array} \tag{3.14}$$

Uz uvjet (3.12) *ovaj sustav je uvijek rješiv i ima jedinstveno rješenje (determinanta matrice sustava je poznata* Vandermondova *determinanta, koja je uz uvjet* (3.12) *različita od nule. Izračunajmo vrijednost Vandermondove determinante*

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{3.15}$$

Najprije ćemo od elemenata svakog stupca (osim prvog) oduzeti odgovarajuće elemente prethodnog stupca pomnožene s x_1. Dobivamo

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & x_2^2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & \cdots & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & x_n^2(x_n - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

Razvojem po elementima prvog retka i redom u dobivenoj subdeterminanti izlučivanjem faktora $(x_2 - x_1), (x_3 - x_1), \ldots, (x_n - x_1)$ iz drugog, trećeg, ... i posljednjeg retka dobivamo

$$V(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}=\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)V(x_2,\ldots,x_n),$$

gdje je $V(x_2,\ldots,x_n)$ opet Vandermondova determinanta, ali $(n-1)$-og reda.
Ponavljanjem postupka dobivamo

$$V(x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i=3}^{n}(x_i-x_2)V(x_3,\ldots,x_n),$$

i konačno

$$\begin{aligned}V(x_{n-2},x_{n-1},x_n) &= \prod_{i=n-1}^{n}(x_i-x_{n-2})V(x_{n-1},x_n)=\prod_{i=n-1}^{n}(x_i-x_{n-2})\begin{vmatrix}1 & x_{n-1}\\ 1 & x_n\end{vmatrix}\\ &=(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1}).\end{aligned}$$

Konačno dobivamo

$$\begin{aligned}V(x_1,\ldots,x_n) &= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\\ &\quad\cdot(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)\\ &\cdots\\ &\quad\cdot(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})\\ &\quad\cdot(x_n-x_{n-1})=\prod_{i>k}^{n}(x_i-x_k).\end{aligned}$$

Primjedba 3.2. *Linearnu zavisnost vektora $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^n$ na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$, na kome je definiran skalarni produkt, možemo ispitati na sljedeći način. Množenjem jednakosti*

$$\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n=0$$

redom vektorima a_k, $k=1,\ldots,n$ dobivamo sustav linearnih jednadžbi s matricom sustava

$$G(a_1,\ldots,a_n)=\begin{bmatrix}\langle a_1,a_1\rangle & \cdots & \langle a_1,a_n\rangle\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \langle a_n,a_1\rangle & \cdots & \langle a_n,a_n\rangle\end{bmatrix}.$$

Matricu G zovemo Gramova *matrica. Može se pokazati da je skup vektora $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^n$ linearno nezavisan onda i samo onda ako je $\det G\neq 0$. Obrazložite ovu tvrdnju za slučaj $n=2$, odnosno $n=3$.*

Zadatak 3.4. Na osnovi *Primjedbe 3.2* ispitajte linearnu zavisnost vektora $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $b = \vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} \in X_0(E)$.
Rješenje: Budući da je $\det G = 9$, vektori su linearno nezavisni.

3.4.1 Kako izračunati vrijednost determinante n-tog reda

Vrijednost determinante matrice $A \in M_n$ možemo pokušati odrediti primjenom prethodno navedenih pravila. Pri tome izabrat ćemo jedan reprezentant promatrane matrice nižeg reda, ali koji dovoljno dobro predstavlja zadanu matricu $A \in M_n$. Obično postupamo na jedan od sljedećih načina (vidi također [**?**]):

- svođenjem na gornjetrokutastu ili donjetrokutastu matricu;
- primjenom *Pravila 5* determinantu razbijemo na zbroj više determinanti ako očekujemo da će se one moći jednostavnije izračunati;
- primjenom definicije (3.7), str.3 razvijemo determinantu po elementima prvog retka (ili ako prethodno matricu transponiramo, po elementima prvog stupca) i na taj način dobijemo više determinanti nižeg reda ako očekujemo da ćemo na taj način dobiti determinante koje ćemo lakše riješiti.

Primjer 3.11. *Sve ćemo ilustrirati na primjeru determinante n-tog reda iz Zadatka 3.8a pri čemu ćemo se koristiti programskim sustavom* Mathematica*. Matricu, čiju determinantu želimo izračunati, definirat ćemo na sljedeći način:*

```
In[1]:= n = 5; A = Table[a, {i, n}, {j, n}];
        Do[A[[i, i]] = x, {i, n}]
```

Matrica reda $n = 5$ dovoljno dobro reprezentira zadanu matricu. Korištenjem modula iz http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/ElMatrice.nb, a uz primjenu elementarnih transformacija, pripadnu matricu A svest ćemo na gornjetrokutastu formu.

Najprije ćemo, primjenom elementarnih transformacija nad retcima matrice svakom retku (osim posljednjeg) dodati redak ispod njega prethodno pomnožen s (-1) (tj. od svakog retka (osim posljednjeg) oduzet ćemo redak ispod njega). Tako dobivamo novu matricu B_1 s pripadnom determinantom

$$B_1 = Q_4(-1;5)\cdot Q_3(-1;4)\cdot Q_2(-1;3)\cdot Q_1(-1;2)\cdot A$$

$$\det A = \det B_1 = \begin{vmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & a-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-a & a-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & a-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a & a-x \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix}.$$

Nakon toga, iz svakog retka (osim posljednjeg) izlučujemo faktor $(x-a)$. Tako dobivamo matricu B_2 s pripadnom determinantom

$$B_2 = Q_4(\tfrac{1}{x-a})\cdot Q_3(\tfrac{1}{x-a})\cdot Q_2(\tfrac{1}{x-a})\cdot Q_1(\tfrac{1}{x-a})\cdot B_1$$

$$\det A = (x-a)^{5-1}\det B_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix}.$$

Konačno, sukcesivno i-ti redak (osim posljednjeg) pomnožim s $(-ia)$ i dodamo posljednjem retku. Tako dobivamo matricu B_3 s pripadnom determinantom

$$B_3 = Q_5(-4a;4)\cdot Q_5(-3a;3)\cdot Q_5(-2a;2)\cdot Q_5(-a;1)\cdot B_2$$

$$\det A = (x-a)^{5-1}\det B_3$$

$$=(x-a)^{5-1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2a & a & a & x \end{vmatrix} = \cdots = (x-a)^{5-1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4a+x \end{vmatrix},$$

što konačno, uz primjenu *Pravila 2* (determinanta gornjetrokutaste matrice) daje

$$\det A = (x-a)^{5-1}(x+(5-1)a).$$

Sada možemo pretpostaviti da je determinanta matrice iz Zadatka 3.8a jednaka $\det A = (x-a)^{n-1}(x+(n-1)a)$, a dokaz možemo provesti matematičkom indukcijom.

Zadatak 3.5. Transponiranjem polazne determinante i korištenjem Vandermondove determinante pokažite da vrijedi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ & & & \cdots & \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots & (n+1)^n \end{vmatrix} = 1!\cdot 2!\cdot 3!\cdots n!$$

Zadatak 3.6. Odredite vrijednosti determinanti

$$a)\ \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix},\quad b)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix},\quad c)\ \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

Rješenja: a) 0, b) $(b-a)(c-a)(c-b)$, c) $-2(x^3+y^3)$.

Zadatak 3.7. Odredite vrijednosti determinanti n-tog reda

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ & & & \cdots & \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix},\ b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ & & & \cdots & & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix},\ c)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ & & & \cdots & \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

Rješenja: a) $n!$, b) $(n-1)!$, c) $-2(n-2)!$.

Zadatak 3.8. Odredite vrijednosti determinanti n-tog reda

$$a)\ \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ & & & \cdots & \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix},\ b)\ \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ & & & \cdots & & \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix},\ c)\ \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

Rješenja: a) $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$, b) $\frac{1}{2}((x+a)^n+(x-a)^n)$, c) $(-1)^n(n+1)a_1a_2\cdots a_n$.

Zadatak 3.9. Pokažite da vrijedi

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

3.5 Laplaceov razvoj determinante

Definicija 3.1. *Minor (subdeterminanta) elementa a_{ik} matrice $A \in M_n$ je broj*[1]

$$\det A_{ik},$$

[1]Prilikom ispitivanja definitnosti kvadratne forme posebnu ulogu imaju glavni minori koji se dobiju izdvajanjem proizvoljnih k redaka i k stupaca matrice (ali tako da su skupovi indeksa odabranih redaka i stupaca identični) i vodeći glavni minori: $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det(\mathbf{A})$ (vidi [1, str. 284]).

a ***kofaktor (algebarski komplement)*** *elementa a_{ik} matrice $A \in M_n$ je broj*

$$(-1)^{i+k} \det A_{ik},$$

gdje je A_{ik} submatrica koja se iz matrice A dobiva ispuštanjem i-tog retka i k-tog stupca.

Teorem 3.3. *Za svaku matricu $A \in M_n$ vrijedi* ***Laplaceov razvoj determinante*** *po elementima i-tog retka*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}, \tag{3.16}$$

i po elementima j-tog stupca

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det A_{kj}. \tag{3.17}$$

Dokaz. Pomoću $i-1$ permutacija susjednih redaka matrice A matricu $A = (a^1, \ldots, a^n)$ prevodimo u matricu

$$B = (a^i, a^1, \ldots, a^{i-1}, a^{i+1}, \ldots, a^n).$$

Vrijedi

$$(-1)^{i-1} \det A = \det B = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} b_{1k} \det B_{1k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{ik} \det A_{ik},$$

jer je $b_{1k} = a_{ik}$ i $B_{1k} = A_{ik}$. Množenjem s $(-1)^{i-1}$ dobivamo (3.16) $[(-1)^{i+k-2} = \frac{(-1)^{i+k}}{(-1)^2} = (-1)^{i+k}]$.

Laplaceov razvoj (3.17) dobiva se iz (3.16) i Teorema 3.2. □

Primjer 3.12. *Laplaceovim razvojem po elementima 2-og retka sljedeće determinante, dobivamo*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Provjerite da bi se isti rezultat dobio ako bi primijenili Laplaceov razvoj determinante po nekom drugom retku ili stupcu.

Primijetite da bi se računanje vrijednosti determinante znatno pojednostavilo kad bi se u nekom retku ili stupcu pojavilo više nula, što možemo postići primjenom spomenutih svojstava. Tako primjerice ako bi u prethodnoj determinanti treći redak dodali prvom retku, determinanta ne bi promijenila vrijednost, ali bi izračunavanje njene vrijednosti razvojem po elementima prvog retka ili drugog stupca bilo puno brže

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\text{odnosno } (-1) \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right) = 6.$$

Pravilo 9 Vrijedi poopćenje Teorema 3.3:

[elementi r-tog retka, a algebarski komplementi iz s-tog retka:]

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{s+k} a_{rk} \det A_{sk} = \delta_{rs} \det A, \tag{3.18}$$

[elementi r-tog stupca, a algebarski komplementi iz s-tog stupca:]

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{s+k} a_{kr} \det A_{ks} = \delta_{rs} \det A. \tag{3.19}$$

Dokaz. Pokažimo formulu (3.19) u slučaju $r \neq s$. Neka je C matrica koja se od matrice A dobije tako da njezin r-ti stupac zamijenimo s-tim. Dakle, $c_r = c_s = a_s$, pa je zato $\det C = 0$ (dva jednaka stupca).

S druge strane, iz (3.17) slijedi

$$0 = \det C = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} c_{kr} \det C_{kr} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} a_{ks} \det A_{kr},$$

jer je $C_{kr} = A_{kr}$ i $c_{kr} = a_{ks}$. □

Primjedba 3.3. *Kvadratnoj matrici $A \in M_n$ možemo pridružiti matricu $\tilde{A} \in M_n$ s elementima*

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}. \tag{3.20}$$

Primijetite da elementu $\tilde{a}_{ij}$ odgovara kofaktor (algebarski komplement) elementa a_{ji} matrice A (vidi Definiciju 3.1)).

Jednakost (3.19) *tada možemo zapisati kao*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kr}\tilde{a}_{sk} = \delta_{rs} \det A,$$

odnosno u matričnom obliku kao

$$\tilde{A} \cdot A = \det A \cdot I. \tag{3.21}$$

Korolar 3.4. *Matrica* $A \in M_n$ *je regularna onda i samo onda ako je* $\det A \neq 0$.

Dokaz. Ako je A regularna matrica, postoji A^{-1} takva da je $A \cdot A^{-1} = I$. Prema Binet-Cauchyjevom teoremu je $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, odakle slijedi $\det A \neq 0$.

Obratno, ako je $\det A \neq 0$, iz (3.21) slijedi regularnost. Nakon dijeljenja s $\det A$ dobivamo eksplicitnu formulu za inverznu matricu

$$A^{-1} = \tfrac{1}{\det A}\tilde{A}. \tag{3.22}$$

□

Primjer 3.13. *Ako je* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\det A = ad - bc \neq 0$, *onda je* $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Zadatak 3.10. Primjenom formule (3.22) odredite inverznu matricu matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje: $\det A = -1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

3.6 Cramerova metoda

Sljedeći teorem uvodi poznatu Cramerovu metodu za rješavanje sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je $A \in GL_n$ regularna matrica. Metoda ima uglavnom teorijski značaj jer pretpostavlja izračunavanje $n+1$ determinanti n-tog reda, a to za nešto veći n može uzeti značajnu količinu vremena rada računala.

Promatramo sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$ koji možemo zapisati kao

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.23}$$

Teorem 3.4. (G. Cramer)
Ako je $A \in GL_n$ regularna matrica, onda je rješenje sustava (3.23) dano s

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{3.24}$$

gdje je $D = \det[a_1, \ldots, a_n] = \det A$, a

$$D_1 = \det[b, a_2, \ldots, a_n], \quad D_2 = \det[a_1, b, a_3, \ldots, a_n], \ldots, D_n = \det[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b].$$

Dokaz. Sustav (3.23) možemo zapisati u matričnom obliku kao $Ax = b$. Kako je A regularna matrica postoji njen inverz kojim slijeva pomnožimo jednadžbu i dobivamo rješenje $x = A^{-1}b$. Korištenjem (3.22) dobivamo

$$\begin{aligned} x_j = \frac{(\tilde{A} \cdot b)_j}{\det A} &= \tfrac{1}{D} \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{jk} b_k \\ &= \tfrac{1}{D} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \det A_{kj} b_k = \tfrac{D_j}{D}, \end{aligned}$$

jer je $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \det A_{kj} b_k$ Laplaceov razvoj po j-tom stupcu determinante dobivene od determinante D zamjenom j-tog stupca vektorom slobodnih koeficijenata b. [Napišite determinantu D_j i napravite njezin razvoj po elementima j-tog stupca] □

Korolar 3.5. *Sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, $A \in M_n$, ima jedinstveno rješenje onda i samo onda ako je $\det A \neq 0$ (matrica sustava je regularna).*

Specijalno, homogeni sustav $Ax = 0$ ima samo trivijalno rješenje $x_1 = \cdots = x_n = 0$ onda i samo onda ako je $\det A \neq 0$ (matrica sustava je regularna).

Ako je $D = 0$ i $D_1 = \cdots = D_n = 0$, sustav je rješiv i ima beskonačno mnogo rješenja.

Ako je $D = 0$, a pri tome barem jedan od brojeva $D_1, \ldots, D_n$ različit od nule, sustav nema rješenja.

Primjer 3.14. *Primjenom Cramerovog pravila diskutirat ćemo sljedeći sustav jednadžbi u ovisnosti o parametru* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda$$
$$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2$$

Rješenje: *Ako je* $(\lambda-1)(\lambda+2) \neq 0$, $x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}$, $x_2 = \frac{1}{\lambda+2}$, $x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$. *Ako je* $\lambda = 1$, *sustav ima rješenje koje ovisi o dva parametra. Ako je* $\lambda = -2$, *sustav nema rješenja.*

Prethodni primjer možemo riješiti i primjenom niže navedenog *Mathematica*-programa.

```
In[1]:=                       (* Unos podataka *)
        A={{lam,1,1}, {1,lam,1}, {1,1,lam}}; b={1,lam,lam^2}; n=Length[A];
        Print["A=", MatrixForm[A], "; b=", MatrixForm[b]];
                                (* Račun *)
        Print["D=", det = Factor[Det[A]]]
        B = Transpose[A];
        Do[
         Dj = Replace[B, Association[{B[[j]] -> b}], 1];
         Print["A", j, "= ", MatrixForm[Transpose[Dj]]];
         Print["D", j, "= ", det1 = Factor[Det[Dj]], "; x", j, "=",
                det1/det // Simplify];
         , {j, n}]
```

Zadatak 3.11. Primjenom Cramerovog pravila riješite sljedeći sustav

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 9$$
$$3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4$$
$$4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5$$

Rješenje: $D = -2$, $D_1 = 168$, $D_2 = 93$, $D_3 = -31$, $x_1 = -84$, $x_2 = -\frac{93}{2}$, $x_3 = \frac{31}{2}$.

Zadatak 3.12. Primjenom Cramerovog pravila diskutirajte sustav jednadžbi

$$(\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda$$
$$\lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 2\lambda$$
$$3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3$$

Rješenje: $D = \lambda^2(\lambda-1)$.

Zadatak 3.13. Primjenom Cramerovog pravila diskutirajte sustav jednadžbi

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda$$
$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda-1)x_3 = \lambda$$
$$(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda+3)x_3 = 1$$

Rješenje: $D = -2\lambda$. Ako je $\lambda \neq 0$, $x_1 = 1 - \lambda$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = 0$. Ako je $\lambda = 0$, $x_1 = 1$, $x_3 = 0$, x_2 proizvoljan.

Cramerovo pravilo može se analogno primijeniti i za rješavanje većih kvadratnih sustava linearnih jednadžbi. Pri tome ova metoda ima samo teorijsku vrijednost jer je njena efikasnost vrlo niska.

Niže navedenim *Mathematica*-programom možemo riješiti sustav linearnih jednadžbi ako je matrica sustava regularna [određeni sustav].

```
In[1]:=                (* Definiranje sustava *)
        SeedRandom[13]; n = 4;
        A=RandomInteger[{-10,10}, {n,n}]; b=RandomInteger[{-10,10},{n}];
        x = Table[0, {i, n}];
        Print["A=", MatrixForm[A], "; b=", MatrixForm[b]];
        If[Det[A] != 0, Print["D= ",det=Det[A]],
            Print["Sustav nije određen jer je det A=0"]]
                             (* Račun *)
        B = Transpose[A];
        Do[
         Dj = Replace[B, Association[{B[[j]] -> b}], 1];
         Print["A", j, "= ", MatrixForm[Transpose[Dj]]];
         Print["D",j,"= ",det1=Det[Dj],"; x",j,"=",x[[j]]=det1/det //N];
         , {j, n}]
        Print["Rješenje= ", x]
        Print["Kontrola= ", A.x]
```

Niže navedenim *Mathematica*-programom izračunava se vrijednost velikih determinante čiji su elementi slučajni realni brojevi na intervalu $[0, 100]$ i pri tome se mjeri vrijeme rada računala (tzv. CPU-time).

```
In[1]:=n = 10000;
       A = RandomReal[{0, 100}, {n, n}];
       Timing[Det[A]]

Out[1]={9.95313, -1.980808127726937*10^32434}
```

Literatura

[1] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2017, `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=707`.

[2] R. SCITOVSKI, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 3, izdanje, 2015, `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=541`.