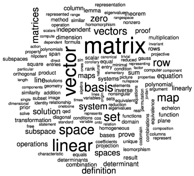

Linearna algebra 1

Vježbe 1

10.10.2022.

predavač: izv.prof.dr.sc. Zoran Tomljanović
asistent: Marinela Pilj Vidaković, dr.sc. Darija Brajković Zorić

1. Vektori u ravnini i prostoru

Definicija

Vektor $\vec{a}$ je klasa ekvivalencije svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina,

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{PQ} \,:\, \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}\}$$

Svaku usmjerenu dužinu $\overrightarrow{PQ}$ ekvivalentnu usmjerenoj dužini $\overrightarrow{AB}$ nazivamo **reprezentant** vektora $\vec{a}$. Pri tome pod **normom vektora** podrazumijevamo duljinu bilo kojeg reprezentanta, a označit ćemo ju s $\|\vec{a}\|$.

Zadatak 1.

Ispitajte koje su od sljedećih relacija relacije ekvivalencije:

a) „biti jednak” na skupu $\mathbb{R}$.

b) „biti manji” na skupu $\mathbb{R}$.

c) „biti okomit” na skupu $\mathcal{P}$ svih pravaca u ravnini.

d) „biti paralelan” na skupu $\mathcal{P}$ svih pravaca u ravnini.

Neka je G neprazan skup. Binarna operacija na G funkcija je koja svakom uređenom paru elemenata od G pridružuje element od G, odnosno

$$(a, b) \mapsto a * b \in G, \ \ \forall a, b \in G.$$

Kažemo da je skup G zatvoren s obzirom na binarnu operaciju $*$.

Neka je G neprazan skup i $*\colon G \times G \to G$ binarna operacija. Kažemo da je $(G, *)$ **grupa**, ako vrijede sljedeća svojstva:

1) asocijativnost: $(a * b) * c = a * (b * c), \ \forall a, b, c \in G$.
2) postojanje neutralnog elementa: $\exists e \in G$ takav da je $a * e = e * a = a, \ \forall a \in G$.
3) postojanje inverznog elementa: $(\forall a \in G)\ (\exists a^{-1} \in G)$ takav da je $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Ako još vrijedi i:

4) komutativnost: $a * b = b * a, \ \forall a, b \in G$,

onda kažemo da je $(G, *)$ **komutativna ili Abelova grupa**.

Zadatak 2.

Pokažite da:

a) $(\mathbb{N}, +)$ nije grupa.

b) $(\mathbb{Z}, +)$ je Abelova grupa.

c) $(\mathbb{R}, +)$ je Abelova grupa.

d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa.

Zadatak 3.

Neka je D točka dužine $\overline{AB}$ takva da je $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB}$, gdje je $0 < \lambda < 1$. Dokažite da je

$$\overrightarrow{OD} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.$$

Zadatak 4.

Neka su A, B različite točke u ravnini i točke A_1, B_1 takve da je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_1} &= \lambda\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OB_1} &= \lambda\overrightarrow{OB},\end{aligned}$$

gdje je $\lambda \neq 0$ realan broj. Dokažite da je $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Zadatak 3.

Neka je D točka dužine $\overline{AB}$ takva da je $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB}$, gdje je $0 < \lambda < 1$. Dokažite da je

$$\overrightarrow{OD} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.$$

Zadatak 4.

Neka su A, B različite točke u ravnini i točke A_1, B_1 takve da je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_1} &= \lambda\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB_1} &= \lambda\overrightarrow{OB}, \end{aligned}$$

gdje je $\lambda \neq 0$ realan broj. Dokažite da je $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Zadatak 5.

Neka je C točka dužine $\overline{AB}$ takva da je $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, gdje je $0 < \lambda < 1$. Dokažite da je

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}).$$