Pravila

Pismeni ispit se piše 120 minuta. Da bi se pristupilo usmenom dijelu ispita, potrebno je skupiti barem 50 od 100 mogućih bodova na pismenom ispitu. Ispit se predaje s papirom sa zadacima i radnim listovima. Rezultati ispita će biti objavljeni na web stranici kolegija.

Zadatak 1 (20).
(a) Iskažite Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost u vektorskom obliku. Uz koji uvjet vrijedi jednakost?

(b) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti pokažite da vrijedi:

$$\frac{9}{2(a+b+c)} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

Zadatak 2 (20).
(a) Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ dva linearno nezavisna vektora u ravnini. Dokažite da se tada svaki vektor $\vec{c} \in X_0(M)$ na jedinstven način može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

(b) Dan je trokut $\triangle ABC$. Točka M dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $1:2$ i točka N dijeli dužinu $\overline{BC}$ u omjeru $2:1$. Vektorskim računom odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{AC}.$$

Zadatak 3 (20).
(a) Kolike su vrijednosti determinanti elementarnih matrica?

(b) Koristeći Cramerovo pravilo u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ diskutirajte sustav:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
(1+\lambda)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\
x_1 & + & (1+\lambda)x_2 & + & x_3 & = & \lambda \\
x_1 & + & x_2 & + & (1+\lambda)x_3 & = & \lambda^2.
\end{array}$$

Zadatak 4 (20).
Riješite matričnu jednadžbu $A \cdot X = 7(A^T + B^2)$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 5 (20).
(a) Kako se računa udaljenost točke $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ do ravnine M koja je zadana u Hesseovom normalnom obliku?

(b) Ravnina π_1 sadrži pravac p_1 koji je određen točkom $T_1 = (2, 1, -1)$ i vektorom $\vec{a}_1 = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ te je okomita na ravninu π_2. Ravnina π_2 paralelna je s ravninom $\pi_3 \ldots 3x - y + 4z + 4 = 0$ i sadrži pravac $p_2 \ldots \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Odredite jednadžbe ravnina π_1 i π_2, udaljenost između ravnina π_2 i π_3 te sve tri ravnine π_1, π_2 i π_3 zapišite u Hesseovom normalnom obliku.