Pismeni ispit

8.2.2022.

Pravila

Pismeni ispit se piše 120 minuta. Da bi se pristupilo usmenom dijelu ispita, potrebno je skupiti barem 45 od 100 mogućih bodova na pismenom ispitu. Ispit se predaje s papirom sa zadacima i radnim listovima. Rezultati ispita će biti objavljeni na web stranici kolegija.

Zadatak 1 (20).
Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti pokažite da vrijedi:

$$\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{4y}+\frac{5}{12z}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{5z}{12}\right)\geq 1.$$

Zadatak 2 (20).
Čine li vektori $\vec{a}=2\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ i $\vec{c}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ bazu u $X_0(E)$? Ukoliko čine, Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije sagradite ortonormiranu bazu $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. Zatim, vektor $\vec{d}=-\vec{i}+2\vec{k}$ prikažite u ortonormiranoj bazi $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Zadatak 3 (20).
Riješite matričnu jednadžbu $AX=2(B^T-I)$, gdje je

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}\ \text{ i }\ B=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&-2\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

i izračunate determinantu matrice X.

Zadatak 4 (20).
Neka je $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$. Odredite vektor $\vec{d}$ koji je okomit na ravninu određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ te provjerite jesu li sljedeći vektori komplanarni:

$$\begin{aligned}\vec{x}&=(\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{i}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{j}-2(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{k},\\ \vec{y}&=3(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{i}+(\vec{b}\cdot\vec{b})\vec{j}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{k},\\ \vec{z}&=-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{i}+(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{j}+(\vec{c}\cdot\vec{c})\vec{k}.\end{aligned}$$

Zadatak 5 (20).
Ravnina π_1 sadrži točku $P_1=(3,2,0)$ i okomita je na pravac p koji je određen točkom $T=(2,-2,1)$ i vektorom $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, a ravnina π_2 okomita je na ravninu $\pi_3\ldots x+y-2z-1=0$ i sadrži pravac $p_2\ldots\frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{4}$. Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca p te odredite jednadžbu ravnine π_1 i jednadžbu ravnine π_2.