Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
3. srpanj 2019.

Pismeni ispit
Linearna algebra 1

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Iskažite Hölderovu nejednakost.*

(b) *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Koristeći nejednakost*

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3},$$

primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti pokažite da vrijedi:

$$1 \leq \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b}.$$

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Napišite definiciju linearne kombinacije vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.*

(b) *Dan je trapez $ABCD$. Točka E polovište je stranice $\overline{AD}$, a točka F polovište stranice $\overline{BC}$. Primjenom vektorskog računa odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{EF}.$$

Zatim, primjenom vektorskog računa pokažite da su vektori $\overrightarrow{EF}$ i $\overrightarrow{AB}$ kolinearni te da su vektori $\overrightarrow{EF}$ i $\overrightarrow{DC}$ kolinearni.

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Kako se definiraju l_1, l_2 i l_∞ norme vektora $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$?*

(b) *Dani su vektori $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$ i $\vec{c} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$. Odredite l_1 normu vektora $\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c}$. Ispitajte čine li vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ bazu u $X_0(E)$. Ukoliko čine, Gramm-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije sagradite ortonormiranu bazu $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ i vektor $\vec{d} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ prikažite u ortonormiranoj bazi $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.*

Zadatak 4. [20 bodova]
Riješite matričnu jednadžbu $M \cdot X = (N - I)^T$, gdje je

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \; N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

i Laplaceovim razvojem po elementima 1. stupca odredite determinantu matrice $(N - I)^T$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Napišite definiciju vektorskog produkta vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(E)$.

(b) Neka je $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ *i* $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. *Odredite vektor* $\vec{d}$ *koji je okomit na ravninu određenu vektorima* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *te provjerite jesu li vektori*

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{i} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{j} - 2(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{k}, \\
\vec{y} &= 3(\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{i} + (\vec{b} \cdot \vec{b})\vec{j} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{k}, \\
\vec{z} &= -(\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{i} + (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{j} + (\vec{c} \cdot \vec{c})\vec{k},
\end{aligned}$$

komplanarni.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
3. srpanj 2019.

Pismeni ispit
Geometrija ravnine i prostora – Uvod u algebru

Zadatak 1. [20 bodova]
Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Koristeći nejednakost

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3},$$

primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti pokažite da vrijedi:

$$1 \leq \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b}.$$

Zadatak 2. [20 bodova]
Dan je trapez $ABCD$. Točka E polovište je stranice $\overline{AD}$, a točka F polovište stranice $\overline{BC}$. Primjenom vektorskog računa odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{EF}.$$

Zatim, primjenom vektorskog računa pokažite da su vektori $\overrightarrow{EF}$ i $\overrightarrow{AB}$ kolinearni te da su vektori $\overrightarrow{EF}$ i $\overrightarrow{DC}$ kolinearni.

Zadatak 3. [20 bodova]
Dani su vektori $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$ i $\vec{c} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$. Odredite l_1 normu vektora $\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c}$. Ispitajte čine li vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ bazu u $X_0(E)$. Ukoliko čine, Gramm-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije sagradite ortonormiranu bazu $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ i vektor $\vec{d} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ prikažite u ortonormiranoj bazi $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Zadatak 4. [20 bodova]
Riješite matričnu jednadžbu $M \cdot X = (N - I)^T$, gdje je

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

i Laplaceovim razvojem po elementima 1. stupca odredite determinantu matrice $(N - I)^T$.

Zadatak 5. [20 bodova]
Neka je $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Odredite vektor $\vec{d}$ koji je okomit na ravninu određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ te provjerite jesu li vektori

$$\vec{x} = (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{i} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{j} - 2(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{k},$$
$$\vec{y} = 3(\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{i} + (\vec{b} \cdot \vec{b})\vec{j} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{k},$$
$$\vec{z} = -(\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{i} + (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{j} + (\vec{c} \cdot \vec{c})\vec{k},$$

komplanarni.