Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
4. veljače 2019.

Pismeni ispit
Linearna algebra 1

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Iskažite Cauchy – Schwarz – Buniakowsky nejednakost.*

(b) *Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Ako je $(x+y+z)^2 \geq 3$, primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti pokažite da vrijedi:*

$$\frac{2x^2}{y+z} + \frac{2y^2}{z+x} + \frac{2z^2}{x+y} \geq \sqrt{3}.$$

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Napišite definiciju norme vektora u vektorskom prostoru X_0.*

(b) *Dan je konveksan peterokut $ABCDE$. Točke P, R, S i T redom su polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$, a točke M i N polovišta dužina $\overline{PS}$ i $\overline{RT}$. Primjenom vektorskog računa odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$\|\overrightarrow{MN}\| = \lambda \|\overrightarrow{AE}\|.$$

Zadatak 3. [20 bodova]
Riješite matričnu jednadžbu $A \cdot X = B^T - 2I$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatim, Laplaceovim razvojem po elementima 3. retka odredite determinantu matrice X.

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Iskažite Binet-Cauchyjev teorem.*

(b) *Primjenom Cramerovog pravila u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ diskutirajte sustav linearnih jednadžbi:*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & x_2 & + & (a-1)x_3 & = & a \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a+1. \end{array}$$

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Napišite definiciju vektorskog produkta vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(E)$.*

(b) *Dani su vektori $\vec{a} = 2\lambda\vec{i} + \vec{j} + (1-\lambda)\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$. Odredite parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak kutu između vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$.*