Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
10. rujan 2019.

Pismeni ispit
Linearna algebra 1

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) Iskažite Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost.

(b) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $bc + ac + ab = 2abc$. Primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti pokažite da vrijedi:

$$\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}.$$

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) Napišite definiciju linearne zavisnosti i definiciju linearne nezavisnosti vektora $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_n \in X_0$.

(b) Dan je paralelogram $ABCD$. Neka su točke P na stranici $\overline{AD}$ i S na dijagonali $\overline{AC}$ takve da vrijedi $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AS}$. Odredite realan broj λ takav da je

$$\overrightarrow{PS} = \lambda \overrightarrow{PB}.$$

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) Napišite definiciju regularne matrice i definiciju singularne matrice.

(b) Riješite matričnu jednadžbu $B \cdot X = A^T - 2IB$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 11 \\ -5 & -9 & -1 \\ 11 & -14 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4. [20 bodova]
Primjenom Cramerovog pravila u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ diskutirajte sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ \lambda x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 1. \end{array}$$

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) Napišite definiciju vektorskog produkta vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(E)$.

(b) Odredite cijeli broj x takav da vektori $\vec{a} = x\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ i $\vec{c} = -9\vec{j} + 18\vec{k}$ leže u istoj ravnini. Zatim, odredite vektor $\vec{d}$ koji je okomit na ravninu određenu dobivenim vektorom $\vec{a}$ i danim vektorom $\vec{b}$ te izračunajte l_1 i l_∞ norme vektora $\vec{e} = \vec{d} + \vec{c}$.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
10. rujan 2019.

Pismeni ispit
Geometrija ravnine i prostora – Uvod u algebru

Zadatak 1. [20 bodova]
Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $bc + ac + ab = 2abc$. Primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti pokažite da vrijedi:

$$\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}.$$

Zadatak 2. [20 bodova]
Dan je paralelogram $ABCD$. Neka su točke P na stranici $\overline{AD}$ i S na dijagonali $\overline{AC}$ takve da vrijedi $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AS}$. Odredite realan broj λ takav da je

$$\overrightarrow{PS} = \lambda \overrightarrow{PB}.$$

Zadatak 3. [20 bodova]

Riješite matričnu jednadžbu $B \cdot X = A^T - 2IB$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 11 \\ -5 & -9 & -1 \\ 11 & -14 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4. [20 bodova]

Primjenom Cramerovog pravila u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ diskutirajte sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ \lambda x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 1. \end{array}$$

Zadatak 5. [20 bodova]
Odredite cijeli broj x takav da vektori $\vec{a} = x\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ i $\vec{c} = -9\vec{j} + 18\vec{k}$ leže u istoj ravnini. Zatim, odredite vektor $\vec{d}$ koji je okomit na ravninu određenu dobivenim vektorom $\vec{a}$ i danim vektorom $\vec{b}$ te izračunajte l_1 i l_∞ norme vektora $\vec{e} = \vec{d} + \vec{c}$.