M099 Vektorski prostori

Tema: Vježbe 1 - Konačnodimenzionalni vektorski prostori

18.10.2022.

predavač: izv.prof.dr.sc. Ivan Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Osnovne algebarske strukture

Neka je G neprazan skup. **Binarna operacija** na G funkcija je koja svakom uređenom paru elemenata od G pridružuje element od G, odnosno

$$(a, b) \mapsto a * b \in G, \ \ \forall a, b \in G.$$

Kažemo da je skup G zatvoren s obzirom na binarnu operaciju $*$.

Definicija grupe

Neka je G neprazan skup i $*\colon G \times G \to G$ binarna operacija. Kažemo da je $(G, *)$ **grupa**, ako vrijede sljedeća svojstva:

1) asocijativnost: $(a * b) * c = a * (b * c),\ \forall a, b, c \in G$.
2) postojanje neutralnog elementa: $\exists e \in G$ takav da je $a * e = e * a = a,\ \forall a \in G$.
3) postojanje inverznog elementa: $(\forall a \in G)\ (\exists a^{-1} \in G)$ takav da je $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Ako još vrijedi i:

4) komutativnost: $a * b = b * a,\ \forall a, b \in G$,

onda kažemo da je $(G, *)$ **komutativna ili Abelova grupa**.

Definicija polja

Neka je K neprazan skup na kojemu su zadane dvije binarne operacije: zbrajanje $+ : K \times K \to K$, $(a,b) \mapsto a+b$, i množenje $\cdot : K \times K \to K$, $(a,b) \mapsto a \cdot b$. Kažemo da je uređena trojka $(K,+,\cdot)$ **polje** ako vrijede sljedeća svojstva:

(1) $(K,+)$ je Abelova grupa s neutralnim elementom 0

(2) $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa s neutralnim elementom 1

(3) množenje je distributivno u odnosu na zbrajanje:
$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a,b,c \in K.$$

Definicija vektorskog prostora

Neka je V neprazan skup i K polje. Neka su zadane binarna operacija zbrajanja $+ : V \times V \to V$, $(a, b) \mapsto a + b$ i operacija množenja skalarima iz polja K, $\cdot : K \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$. Kažemo da je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ **vektorski prostor nad poljem** K ako vrijede sljedeća svojstva:

(1) $(V, +)$ je Abelova grupa

(2) distributivnost obzirom na zbrajanje u V:
$\forall \lambda \in K$, $\forall a, b \in V$ vrijedi $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

(3) distributivnost obzirom na zbrajanje u K:
$\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall a \in V$ vrijedi $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

(4) kvaziasocijativnost: $\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall a \in V$ vrijedi $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$

(5) jedinica $1 \in K$ ima svojstvo $1a = a$, $\forall a \in V$.

Zadatak 1

Provjerite je li $\mathbb{R}$ uz standardno zbrajanje i množenje skalarom definirano s

$$\lambda \otimes x = \lambda + x + \lambda x, \quad x, \lambda \in \mathbb{R},$$

realan vektorski prostor.

Definicija vektorskog potprostora

Potprostor vektorskog prostora V je podskup $W \subseteq V$ koji je i sam vektorski prostor nad istim poljem s obzirom na iste operacije. To znači da je W neprazan podskup od V i da vrijedi:

(1) $v, w \in W \;\Rightarrow\; v + w \in W$,

(2) $\lambda \in K, v \in W \;\Rightarrow\; \lambda v \in W$.

Pišemo $W \leq V$.

Propozicija

Neka je V vektorski prostor nad K i W neprazan podskup od V. Tada je W potprostor od V ako i samo ako vrijedi

$$\lambda a + \mu b \in W, \quad \forall \lambda, \mu \in K,\ \forall a, b \in W.$$

Zadatak 2

Provjerite jesu li sljedeći skupovi realni vektorski prostori uz standardno zbrajanje i množenje sa skalarom:

(a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z, y = 0\}$,

(b) $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 1\}$,

(c) $V_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$,

(d) $V_4 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \mathrm{tr} A = \mathrm{det} A\}$,

(e) $V_5 = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} = z\}$,

(f) $V_6 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + b = c + d\}$.

(g) $V_7 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - b = 0\}$.

(h) $V_8 = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

(i) $V_9 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \mathrm{tr} A = 0\}$.

(j) $V_{10} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = 1, b + c = 0 \right\}$.

(k) $V_{11} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A^T + A = I\}$.

Zadatak 3

Dan je skup $W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon A^T = A \text{ i } \operatorname{tr}(A) = 0\}$. Pokažite da je W potprostor realnog vektorskog prostora $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Zadatak 4

Provjerite jesu li sljedeći skupovi kompleksni vektorski prostori uz standardno zbrajanje i množenje sa skalarom:

(a) $V_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{I}m\ z \geq 0\}$,

(b) $V_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{I}m\ z_1 = \mathrm{R}e\ z_2, \mathrm{I}m\ z_2 = \mathrm{R}e\ z_1\}$.