M099 Vektorski prostori

Tema: Vježbe 2 - Baza i dimenzija

25.10.2022.

predavač: izv.prof.dr.sc. Ivan Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad K, S podskup od V te $X = \{W \leq V : W \supseteq S\}$ skup svih potprostora od V koji sadrže S. Definiramo **linearnu ljusku** od S kao

$$[S] = \bigcap_{W \in X} W.$$

Napomena

Linearna ljuska skupa S je najmanji potprostor od V koji sadrži skup S.

Propozicija

$[S]$ je skup svih linearnih kombinacija vektora iz S.

Napomena

$[S]$ se zove **potprostor generiran skupom** S ili **potprostor razapet skupom** S. Ako je $W = [S]$ kažemo da skup S **razapinje potprostor** W.

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K i S podskup od V. Skup S je **linearno nezavisan** ako vrijedi:

$$x \notin [S \setminus \{x\}], \quad \forall x \in S.$$

Skup je S **linearno zavisan** ako je neki $x \in S$ linearna kombinacija preostalih vektora iz S.

Napomena

Skup S je linearno nezavisan ako i samo ako za sve međusobno različite $x_1, \ldots, x_n \in S$ vrijedi

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \ \wedge \ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Definicija

Baza vektorskog prostora V je linearno nezavisan podskup B od V koji razapinje V, tj. $V = [B]$.

Definicija

Vektorski prostor V je **konačnodimenzionalan** ako postoji konačan skup S takav da je $V = [S]$.

Definicija

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K. Broj elemenata bilo koje baze od V nazivamo **dimenzija** od V i označavamo s $\dim V$ ili $\dim_K V$.

Primjer

(a) $\mathrm{d}im_{\mathbb{R}}\,\mathbb{R} = 1$

(b) $\mathrm{d}im_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C} = 1$

(c) $\mathrm{d}im_{\mathbb{R}}\,\mathbb{C} = 2$

(d) $\mathrm{d}im_{\mathbb{R}}\,\mathbb{R}^n = n$

(e) $\mathrm{d}im_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^n = n$

(f) $\mathrm{d}im_{\mathbb{R}}\,\mathbb{C}^n = 2n$

Zadatak 1

Odredite neku bazu i dimenziju vektorskog prostora:

(a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z, y = 0\}$,

(b) $V_5 = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} = z\}$,

(c) $V_6 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + b = c + d\}$.

(d) $V_7 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - b = 0\}$.

(e) $V_8 = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

(f) $V_9 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \mathrm{tr} A = 0\}$.

Zadatak 2

Neka je V skup svih nizova realnih brojeva. V je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ koji nije konačnodimenzionalan.

Označimo s $A \subseteq V$ skup svih aritmetičkih nizova. Ispitajte je li A vektorski prostor te ako je odredite mu neku bazu i dimenziju.

Zadatak 3

Neka je V vektorski prostor nad K i $\{e_1, \dots, e_n\}$ neka baza od V te neka je

$$b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in V.$$

Dokažite da je skup $\{e_1, \dots, e_{k-1}, b, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ baza od V ako i samo ako je $\lambda_k \neq 0$.