M099 Vektorski prostori

Tema: Vježbe 3 - Suma i presjek potprostora

8.11.2022.

predavač: izv.prof.dr.sc. Ivan Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Teorem

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $W \leq V$, onda je

$$\dim W \leq \dim V.$$

Nadalje, $\dim W = \dim V$ ako i samo ako je $W = V$.

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K te $U, W \leq V$. Tada je

$$[U \cup W] = \{u + w \colon u \in U, w \in W\} = U + W$$

suma potprostora U i W.

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K te $U_1, U_2, \dots, U_n \leq V$. Tada je

$$[U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n] = \{u_1 + u_2 + \cdots + u_n \colon u_i \in U_i,\ \forall i\}.$$

suma potprostora $U_1, U_2, \dots, U_n$ koju označavamo s $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

Propozicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K te neka su U i W konačnodimenzionalni potprostori od V. Tada je $U + W$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad K i vrijedi:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Zadatak 1

U $\mathbb{R}^3$ su dani potprostori M i N takvi da je M zadan bazom

$$B_M = \{(1,0,3),(1,-1,1)\},$$

a N s bazom

$$B_N = \{(1,0,-1),(1,1,0)\}.$$

Odredite neku bazu za $M+N$ i neku bazu za $M \cap N$ te dimenzije od $M+N$ i $M \cap N$.

Zadatak 2

U $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dani su potprostori M i N razapeti skupovima

$$S_M = \{1 + 2t + t^3, 1 + t + t^2, t - t^2 + t^3\}$$

i

$$S_N = \{1 + t^2, 1 + 3t + t^3, 3t - t^2 + t^3\}.$$

Odredite neke baze od $M + N$ i $M \cap N$ te dimenzije od $M + N$ i $M \cap N$.

Zadatak 3

U $\mathbb{R}^4$ dani su potprostori M i N s bazama

$$B_M = \{(1,1,1,1),(1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1)\}$$

i

$$B_N = \{(1,-1,-1,1),(2,-2,0,0),(3,-1,1,1)\}.$$

Odredite neke baze od $M+N$ i $M \cap N$ te dimenzije od $M+N$ i $M \cap N$.

Zadatak 4

U $\mathbb{R}^3$ dani su potprostori M i N s bazama

$$B_M = \{(1,1,1),(1,2,1)\}$$

i

$$B_N = \{(1,0,2),(1,-1,2)\}.$$

Odredite neke baze od $M+N$ i $M \cap N$ te dimenzije od $M+N$ i $M \cap N$.

Zadatak 5

U $\mathbb{R}^3$ dan je potprostor M razapet skupom

$$S_M = \{(1, 0, 2), (0, 1, 3), (-2, 3, 5)\}$$

i potprostor

$$N = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ \text{ i } \ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Ispitajte je li S_M baza od M, odredite neku bazu za N i neku bazu za $M + N$. Kolike su dimenzije od $M + N$ i $M \cap N$?

Zadatak 6

Neka su U i W potprostori od $\mathbb{R}^8$ takvi da je

$$\dim U = 3, \ \dim W = 5 \text{ i } U + W = \mathbb{R}^8.$$

Dokažite da je

$$U \cap W = \{0\}.$$

Zadatak 7

Neka su U i W potprostori od $\mathbb{R}^9$ takvi da je

$$\dim U = \dim W = 5.$$

Dokažite da je

$$U \cap W \neq \{0\}.$$

Zadatak 8

Neka su M i N međusobno različiti potprostori prostora V. Ako vrijedi

$$\dim M = \dim N = 3 \text{ i } \dim V = 4,$$

dokažite da je

$$\dim(M \cap N) = 2.$$

Zadatak 9

Neka su M i N potprostori prostora V. Ako vrijedi

$$\dim M = 4,\ \dim N = 5 \text{ i } \dim V = 7,$$

odredite moguće dimenzije od $M \cap N$.

Direktna suma

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K te $U, W \leq V$ takvi da je $U \cap W = \{0\}$, tada kažemo da je suma potprostora U i W **direktna** i pišemo $U \dot{+} W$.

Napomena

Ako je suma $U + W$ direktna te e baza od U i f baza od W, tada je $e \cup f$ baza od $U \dot{+} W$.

Napomena

Ako je $v \in U \dot{+} W$, onda postoje jedinstveni $u \in U$ i $w \in W$ takvi da je $v = u + w$.

Napomena

Analogno definiramo $W_1 \dot{+} W_2 \dot{+} \cdots \dot{+} W_n$.

Direktna suma

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K te $U, W \leq V$ takvi da je $U \cap W = \{0\}$, tada kažemo da je suma potprostora U i W **direktna** i pišemo $U \dot{+} W$.

Napomena

Ako je suma $U + W$ direktna te e baza od U i f baza od W, tada je $e \cup f$ baza od $U \dot{+} W$.

Napomena

Ako je $v \in U \dot{+} W$, onda postoje jedinstveni $u \in U$ i $w \in W$ takvi da je $v = u + w$.

Napomena

Analogno definiramo $W_1 \dot{+} W_2 \dot{+} \cdots \dot{+} W_n$.

Direktna suma

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K te $U, W \leq V$ takvi da je $U \cap W = \{0\}$, tada kažemo da je suma potprostora U i W **direktna** i pišemo $U \dot{+} W$.

Napomena

Ako je suma $U + W$ direktna te e baza od U i f baza od W, tada je $e \cup f$ baza od $U \dot{+} W$.

Napomena

Ako je $v \in U \dot{+} W$, onda postoje jedinstveni $u \in U$ i $w \in W$ takvi da je $v = u + w$.

Napomena

Analogno definiramo $W_1 \dot{+} W_2 \dot{+} \cdots \dot{+} W_n$.

Direktna suma

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K te $U, W \leq V$ takvi da je $U \cap W = \{0\}$, tada kažemo da je suma potprostora U i W **direktna** i pišemo $U \dot{+} W$.

Napomena

Ako je suma $U + W$ direktna te e baza od U i f baza od W, tada je $e \cup f$ baza od $U \dot{+} W$.

Napomena

Ako je $v \in U \dot{+} W$, onda postoje jedinstveni $u \in U$ i $w \in W$ takvi da je $v = u + w$.

Napomena

Analogno definiramo $W_1 \dot{+} W_2 \dot{+} \cdots \dot{+} W_n$.

Direktni komplement

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K i $W \leq V$. Potprostor $U \leq V$ takav da je $V = W \dot{+} U$ nazivamo **direktni komplement od** W u V.

Propozicija

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K i $W \leq V$. Tada postoji direktni komplement od W u V.

Direktni komplement

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K i $W \leq V$. Potprostor $U \leq V$ takav da je $V = W \dot{+} U$ nazivamo **direktni komplement od** W u V.

Propozicija

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K i $W \leq V$. Tada postoji direktni komplement od W u V.

Zadatak 1

Ako je $W_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$ i $W_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$. Pokažite da su W_1 i W_2 potprostor od $\mathbb{R}^n$ (DZ). Odredite bazu i dimenziju od W_1 i od W_2 te pokažite da je $\mathbb{R}^n = W_1 \dot{+} W_2$.

Zadatak 2

Skupovi

$$W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\, A^T = A \ \text{ i } \ \mathrm{tr}(A) = 0\}$$

i

$$W' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

su potprostor realnog vektorskog prostora $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Odredite bazu i dimenziju od W i od W' te pokažite da je $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = W \dotplus W'$.