M099 Vektorski prostori

Tema: Vježbe 4 - Linearni operatori.

15.11.2022.

predavač: izv.prof.dr.sc. Ivan Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Linearni operatori

Definicija

Neka su V i W vektorski prostori. Svako preslikavanje $A\colon V \to W$ zove se **operator**.

Definicija

Neka su V i W vektorski prostori. Kažemo da je operator $A\colon V \to W$ **aditivan** ako vrijedi:

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2), \ \ \forall v_1, v_2 \in V.$$

Definicija

Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem K. Kažemo da je operator $A\colon V \to W$ **homogen** ako vrijedi:

$$A(\lambda v) = \lambda A(v), \ \ \forall \lambda \in K, \forall v \in V.$$

Linearni operatori

Definicija

Neka su V i W vektorski prostori. Svako preslikavanje $A\colon V \to W$ zove se **operator**.

Definicija

Neka su V i W vektorski prostori. Kažemo da je operator $A\colon V \to W$ **aditivan** ako vrijedi:

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2), \ \ \forall v_1, v_2 \in V.$$

Definicija

Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem K. Kažemo da je operator $A\colon V \to W$ **homogen** ako vrijedi:

$$A(\lambda v) = \lambda A(v), \ \ \forall \lambda \in K, \forall v \in V.$$

Linearni operatori

Definicija

Neka su V i W vektorski prostori. Svako preslikavanje $A\colon V \to W$ zove se **operator**.

Definicija

Neka su V i W vektorski prostori. Kažemo da je operator $A\colon V \to W$ **aditivan** ako vrijedi:

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2), \ \ \forall v_1, v_2 \in V.$$

Definicija

Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem K. Kažemo da je operator $A\colon V \to W$ **homogen** ako vrijedi:

$$A(\lambda v) = \lambda A(v), \ \ \forall \lambda \in K, \forall v \in V.$$

Definicija

Kažemo da je operator $A\colon V \to W$ **linearan** ako je aditivan i homogen, tj. ako vrijedi:

$$A(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda A v_1 + \mu A v_2, \;\; \forall \lambda, \mu \in K, \; \forall v_1, v_2 \in V.$$

Napomena

Neka su V, W vektorski prostori nad istim poljem K. S $L(V, W)$ označavamo skup svih linearnih operatora s V u W. U taj skup uvodimo operacije:

- Za $A, B \in L(V, W)$ definiramo operator $A + B$ s

$$(A + B)v = Av + Bv, \;\; v \in V$$

- Za $A \in L(V, W)$ i $\lambda \in K$ definiramo operator λA s

$$(\lambda A)v = \lambda(Av), \;\; v \in V.$$

Definicija

Kažemo da je operator $A\colon V \to W$ **linearan** ako je aditivan i homogen, tj. ako vrijedi:

$$A(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda A v_1 + \mu A v_2, \ \forall \lambda, \mu \in K, \ \forall v_1, v_2 \in V.$$

Napomena

Neka su V, W vektorski prostori nad istim poljem K. S $L(V, W)$ označavamo skup svih linearnih operatora s V u W. U taj skup uvodimo operacije:

- Za $A, B \in L(V, W)$ definiramo operator $A + B$ s

$$(A + B)v = Av + Bv, \ \ v \in V$$

- Za $A \in L(V, W)$ i $\lambda \in K$ definiramo operator λA s

$$(\lambda A)v = \lambda(Av), \ \ v \in V.$$

Napomena

$A+B, \lambda A \in L(V,W)$. Uz tako definirane operacije, skup $L(V,W)$ postaje vektorski prostor nad K.

Definicija

Ako su V, W, U vektorski prostori nad poljem K te $A \in L(V,W)$ i $B \in L(W,U)$, tada definiramo $BA\colon V \to U$ s

$$(BA)v = B(Av), \quad v \in V.$$

Tako definiran operator je linearan i zove se **produkt operatora**.

Napomena

$A + B, \lambda A \in L(V, W)$. Uz tako definirane operacije, skup $L(V, W)$ postaje vektorski prostor nad K.

Definicija

Ako su V, W, U vektorski prostori nad poljem K te $A \in L(V, W)$ i $B \in L(W, U)$, tada definiramo $BA\colon V \to U$ s

$$(BA)v = B(Av), \;\; v \in V.$$

Tako definiran operator je linearan i zove se **produkt operatora**.

Propozicija

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem K i pretpostavimo da je V konačnodimenzionalan. Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza od V. Za proizvoljne $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$ postoji jedinstveni $A \in L(V, W)$ takav da je

$$Ae_j = w_j, \text{ za } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Napomena

Linearan operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru potpuno je određen svojim djelovanjem na vektore baze.

Propozicija

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem K i pretpostavimo da je V konačnodimenzionalan. Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza od V. Za proizvoljne $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$ postoji jedinstveni $A \in L(V, W)$ takav da je

$$Ae_j = w_j, \text{ za } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Napomena

Linearan operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru potpuno je određen svojim djelovanjem na vektore baze.

Zadatak 1

Odredite djelovanje linearnog operatora na proizvoljni vektor x ako je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadan s $A(1,0,0) = (2,2)$, $A(0,1,0) = (1,0)$, $A(0,0,1) = (1,0)$.

Zadatak 2

Ispitajte jesu li sljedeći operatori linearni:

(a) $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,
$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4)$

(b) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2, 2x_1 - x_2 + 3x_3)$

(c) $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$Ax = 3x + 5$

Zadatak 2

(d) $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$,
$A(z_1, z_2, z_3) = \bar{z_1} + 5z_3$

(e) $A : \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2\} \to \mathbb{C}^2$,
$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ix_3, -x_2)$

(f) $A : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$,
$Ap(t) = p'(t-1) + (tp(t))''$

Zadatak 3

Odredite realne parametre a, b, c tako da operator A bude linearan, gdje je $A : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definiran s

$$Ap(t) = \begin{bmatrix} p(a+1)+b & ap'(0)p'(1) \\ \int\limits_b^1 p(t)\mathrm{dt} & cp(b) \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4

Ispitajte je li operator $A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definiran s

$$A(z_1, z_2) = \overline{z_2}$$

linearan ako su $\mathbb{C}^2$ i $\mathbb{C}$ realni vektorski prostori te ako su $\mathbb{C}^2$ i $\mathbb{C}$ kompleksni vektorski prostori.

Propozicija

Ako su vektorski prostori V i W konačnodimenzionalni, tada je i prostor $L(V,W)$ konačnodimenzionalan i

$$\dim L(V,W) = (\dim V) \cdot (\dim W).$$

Zadatak 1

Dani su operatori $A\colon V \to W$. Odredite $\dim(L(V,W))$ i matrični zapis linearnog operatora u paru kanonskih baza:

(a) $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,
$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4)$

(b) $A : \{(x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2\} \to \mathbb{C}^2$,
$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ix_3, -x_2)$

(c) $A : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$,
$Ap(t) = p'(t-1) + (tp(t))''$.

Zadatak 2

Dan je linearni operator $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definiran s

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4).$$

Odredite matrični zapis od A u paru baza(f', e'), gdje je

$$e' = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

i

$$f' = \{(1, 1), (0, 1)\}.$$